O problema do consumidor: Aplicações em uma utilidade Stone-Geary

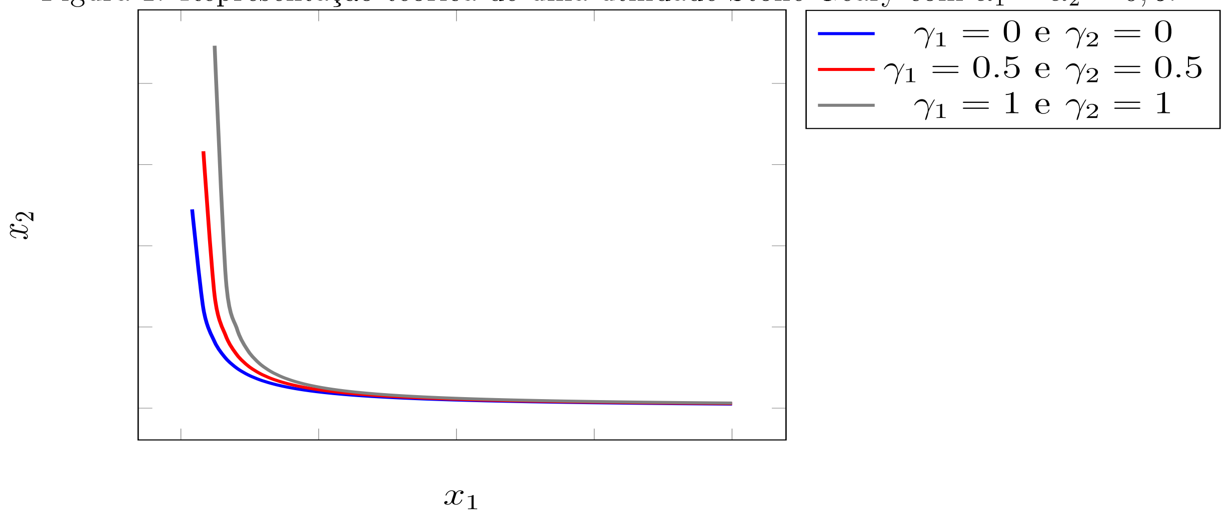
Prof. Helson Gomes de Souza

Considere uma economia com $i = 1, 2, ..., n$ bens. Suponha que a utilidade do consumidor representativo desta economia pode ser escrita de acordo com uma função do tipo Stone-Geary, de tal modo que:

$$U = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \gamma_i)^{\alpha_i} \quad \text{com} \quad \gamma_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i}^{n} \alpha_i = 1 \tag{1}$$

Em que x_i é a demanda pelo i-ésimo bem, α_i é a participação do i-ésimo bem no orçamento do consumidor e γ_i é um parâmetro que mostra o consumo mínimo do i-ésimo bem.

Figura 1: Representação teórica de uma utilidade Stone-Geary com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$.



O consumidor busca maximizar a utilidade sujeito à sua restrição orçamentária dada por:

$$R \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2}$$

Em que R é a renda do consumidor e p_i é o preço do i-ésimo bem. Considerando um sistema com apenas dois bens, x_1 e x_2 e supondo uma solução interior, o lagrangeano do problema é:

$$L = (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2} + \lambda[R - p_1 x_1 - p_2 x_2] \tag{3}$$

As condições de primeira ordem (CPO) são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \alpha_1 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2} - \lambda p_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\alpha_1 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2}}{p_1} \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1} - \lambda p_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}}{p_2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{6}$$

Fazendo Equação 4 = Equação 5:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}}{p_1} &= \frac{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}}{p_2} \\ \frac{p_1}{p_2} &= \frac{\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

Seja Umg_i a utilidade marginal do i-ésimo bem e Umg_j a utilidade marginal do j-ésimo bem com $i \neq j$, então o preço do i-ésimo bem pode ser escrito de acordo com a Equação 7 como:

$$p_i = p_j \left[\frac{Umg_i}{Umg_j}\right] \tag{8}$$

Reorganizando a Equação 7 , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_2} &= \frac{\alpha_1(x_2-\gamma_2)}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)} \\ x_2 - \gamma_2 &= \frac{p_1\alpha_2(x_1-\gamma_1)}{p_2\alpha_1} \\ x_2 &= \frac{p_1\alpha_2(x_1-\gamma_1)+\gamma_2p_2\alpha_1}{p_2\alpha_1} \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo a Equação 9 na Equação 6:

$$\begin{aligned} & R - p_1x_1 - p_2\left[\frac{p_1\alpha_2(x_1-\gamma_1)+\gamma_2p_2\alpha_1}{p_2\alpha_1}\right] = 0 \\ & R = \frac{\alpha_1p_1x_1 + p_1\alpha_2(x_1-\gamma_1)+\gamma_2p_2\alpha_1}{\alpha_1} \\ & R = \frac{p_1x_1(\alpha_1+\alpha_2) - p_1\alpha_2\gamma_1 + \gamma_2p_2\alpha_1}{\alpha_1} \\ & \alpha_1R = p_1x_1(\alpha_1+\alpha_2) - p_1\alpha_2\gamma_1 + \gamma_2p_2\alpha_1 \\ & p_1x_1(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_1R + p_1\alpha_2\gamma_1 - \gamma_2p_2\alpha_1 \\ & x_1 = \frac{\alpha_1(R-p_2\gamma_2)+p_1\gamma_1\alpha_2}{p_1(\alpha_1+\alpha_2)} \\ & \text{Como } \alpha_1+\alpha_2 = 1, \text{ então } \alpha_2 = 1-\alpha_1 \\ & x_1 = \frac{\alpha_1(R-p_2\gamma_2)+p_1\gamma_1(1-\alpha_1)}{p_1} \\ & x_1 = \frac{\alpha_1(R-p_2\gamma_2-p_1\gamma_1)+p_1\gamma_1}{p_1} \\ & x_1 = \gamma_1 + \frac{\alpha_1(R-p_2\gamma_2-p_1\gamma_1)}{p_1} \end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo a Equação 10 na Equação 9:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{p_1\alpha_2(\frac{\alpha_1(R-p_2\gamma_2-p_1\gamma_1)}{p_1}) + \gamma_2 p_2\alpha_1}{p_2\alpha_1} \\
x_2 &= \frac{\alpha_1\alpha_2(R-p_2\gamma_2-p_1\gamma_1) + \alpha_1 p_2\gamma_2}{\alpha_1 p_2} \\
x_2 &= \gamma_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2(R-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2)}{\alpha_1 p_2} \\
x_2 &= \gamma_2 + \frac{\alpha_2(R-p_1\gamma_1-p_2\gamma_2)}{p_2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

As Equações 10 e 11 representam as demandas marshallianas pelos bens x_1 e x_2, respectivamente. Generalizando para n bens, obtém-se:

$$
x_i = \gamma_i + \frac{\alpha_i(R - \sum_i p_i\gamma_i)}{p_i} \tag{12}
$$

Para provar ue se trata de um problema de maximização, considere elaborar a matriz de derivadas de segunda ordem o problema, dada por:

$$
h = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,\lambda} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,\lambda} \\ L_{\lambda,1} & L_{\lambda,2} & L_{\lambda,\lambda} \end{bmatrix} \tag{13}
$$

Para tanto, considere:

$$
L_{1,1} = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \alpha_1 \underbrace{(\alpha_1 - 1)}_{<0}(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-2}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2} \qquad (<0) \tag{14}
$$

$$
L_{1,2} = \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = \alpha_2\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1} \qquad (>0) \tag{15}
$$

$$
L_{1,\lambda} = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = -p_1 \qquad (<0) \tag{16}
$$

$$
L_{2,1} = \frac{\partial L_2}{\partial x_1} = \alpha_2\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1} \qquad (>0) \tag{17}
$$

$$
L_{2,2} = \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = \alpha_2 \underbrace{(\alpha_2 - 1)}_{<0}(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-2} \qquad (<0) \tag{18}
$$

$$
L_{2,\lambda} = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = -p_2 \qquad (<0) \tag{19}
$$

$$
L_{\lambda,1} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_1} = -p_1 \qquad (<0) \tag{20}
$$

$$
L_{\lambda,2} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_2} = -p_2 \qquad (<0) \tag{21}
$$

$$
L_{\lambda,\lambda} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} = 0 \tag{22}
$$

Substituindo as equações 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 22 na Equação 13, obtém-se:

$$h = \begin{bmatrix} L_{1,1} < 0 & L_{1,2} > 0 & L_{1,\lambda} < 0 \\ L_{2,1} > 0 & L_{2,2} < 0 & L_{2,\lambda} < 0 \\ L_{\lambda,1} < 0 & L_{\lambda,2} < 0 & L_{\lambda,\lambda} = 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Seja n o número de variáveis e m o número de restrições, para que este seja um problema de máximo, é preciso que $|h|$ tenha o mesmo sinal de $(-1)^n$ e que os últimos $n-m$ menores principais alternem de sinal. Como neste caso $n = 2$ e $m = 1$, então $m - n = 1$, implicando no fato de que apenas a primeira condição precisa ser satisfeita, isto é, $|h| > 0$ deve ocorrer. Assim, é preciso que o determinante de h seja positivo. Tomando o determinante de h, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&|h| = > * < * < + < * < *0 + < * > * < -(> * > *0 + < * < * < + < * < * <) \\
&|h| = \underbrace{> * < * <}_{>} + \underbrace{< * > * <}_{>} - (\underbrace{< * < * <}_{<} + \underbrace{< * < * <}_{<}) \\
&|h| = \underbrace{> + >}_{>} - (\underbrace{< + <}_{<}) \\
&|h| = > \underbrace{- <}_{>} \\
&|h| = > + > \\
&|h| = > 0
\end{aligned} \tag{24}$$

O que mostra que o problema de maximização de uma utilidade Stone-Geary é de fato um problema de máximo.

Para obter a função de utilidade indireta, considere substituir as equações 10 e 11 na Equação 1:

$$\begin{aligned}
v &= \left(\gamma_1 + \frac{\alpha_1(R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)}{p_1} - \gamma_1\right)^{\alpha_1} \left(\gamma_2 + \frac{\alpha_2(R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)}{p_2} - \gamma_2\right)^{\gamma_2} \\
v &= \left(\frac{\alpha_1(R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2(R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)}{p_2}\right)^{\alpha_2} \\
v &= \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2} (R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2)^{\alpha_1+\alpha_2} \\
v &= (R - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2) \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}
\end{aligned} \tag{25}$$

Generalizando para n bens obtém-se:

$$v = \left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\right) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} \tag{26}$$

Para verificar se a função de utilidade indireta obedece a identidade de Roy, considere:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p_i} &= -\gamma_i \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} - \alpha_i \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i - 1}\alpha_i^{\alpha_i} \left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\right) \\
&= -\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} \left[\gamma_i + \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\right)\right]
\end{aligned} \tag{27}$$

Considere também:

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} \tag{28}$$

Substituindo as equações 27 e 28 na equação da identidade de Roy:

$$\begin{aligned}\frac{-\partial v/\partial p_i}{\partial v/\partial R} &= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}\left[\gamma_i+\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)\left(R-\sum_{i=1}^{n}p_i\gamma_i\right)\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}}\\ &= \gamma_i+\frac{\alpha_i\left(R-\sum_{i=1}^{n}p_i\gamma_i\right)}{p_i}\\ &= x_i\end{aligned} \tag{29}$$

Note que a Equação 29 é equivalente à Equação 12, confirmando o fato de que a identidade de Roy é obedecida em uma função de utilidade do tipo Stone-Geary.

Considere agora que em vez de maximizar a utilidade sujeito a um poder aquisitivo limitado, o consumidor tenha como objetivo minimizar o gasto com consumo sujeito a um determinado nível de utilidade. Neste caso, o problema do consumidor passa a ser:

$$\begin{aligned}&min \quad R=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\\ &\text{Sujeito a:}\\ &u\geq\prod_{i=1}^{n}(x_i-\gamma_i)^{\alpha_i}\end{aligned} \tag{30}$$

Considerando um sistema com apenas dois bens, x_1 e x_2 e supondo uma solução interior, o lagrangeano do problema é:

$$L=p_1x_1+p_2x_2+\lambda[u-(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}] \tag{31}$$

As CPO são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{p_1}{\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}} \tag{32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{p_2}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}} \tag{33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=u-(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}=0 \tag{34}$$

Fazendo $\lambda=\lambda$, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\frac{p_1}{\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}}=\frac{p_2}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}}\\ &\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha_1(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1-1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2}}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)^{\alpha_1}(x_2-\gamma_2)^{\alpha_2-1}}\\ &\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha_1(x_2-\gamma_2)}{\alpha_2(x_1-\gamma_1)}\\ &x_2-\gamma_2=\frac{\alpha_2p_1(x_1-\gamma_1)}{\alpha_1p_2}\\ &x_2=\gamma_2+\frac{\alpha_2p_1(x_1-\gamma_1)}{\alpha_1p_2}\end{aligned} \tag{35}$$

Substituindo a Equação 35 na Equação 34:

$$
\begin{aligned}
&u - (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2 p_1 (x_1 - \gamma_1)}{\alpha_1 p_2} \right)^{\alpha_2} = 0 \\
&u = (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\alpha_2} \\
&\text{Como } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\
&x_1 - \gamma_1 = u \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^{\alpha_2} \\
&x_1 = \gamma_1 + u \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^{\alpha_2}
\end{aligned} \tag{36}
$$

Substituindo a Equação 36 na Equação 35:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = \gamma_2 + \frac{\alpha_2 p_1 u \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^{\alpha_2}}{\alpha_1 p_2} \\
&x_2 = \gamma_2 + u \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right) \left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1} \right)^{\alpha_2} \\
&x_2 = \gamma_2 + u \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{1-\alpha_2} \\
&\text{Como } 1 - \alpha_2 = \alpha_1 \\
&x_2 = \gamma_2 + u \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\alpha_1}
\end{aligned} \tag{37}
$$

Generalizando para n bens:

$$
x_i = \gamma_i + u \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \right)^{\alpha_j} \prod_j \left(\frac{p_j}{\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \tag{38}
$$

A Equação 38 é a equação da demanda Hickssiana e mostra a demanda ótima pelo i-ésimo bem capaz de minimizar a despesa do consumidor ao mesmo tempo que satisfaz uma dada utilidade u. Substituindo as equações 35 e 36 na função objetivo do problema de otimização da Equação 30, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
e &= p_1\left[\gamma_1 + u\left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\alpha_2}\right] + p_2\left[\gamma_2 + u\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_1}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u\left[p_1\left(\frac{\alpha_1 p_2}{\alpha_2 p_1}\right)^{\alpha_2} + p_2\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_1}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u\left[\frac{p_1(\alpha_1 p_2)^{\alpha_2}(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1} + p_2(\alpha_2 p_1)^{\alpha_1}(\alpha_2 p_1)^{\alpha_2}}{(\alpha_2 p_1)^{\alpha_2}(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1}}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u\left[\frac{p_1(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1+\alpha_2} + p_2(\alpha_2 p_1)^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_2 p_1)^{\alpha_2}(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1}}\right] \\
&\text{Como } \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u\left[\frac{p_1\alpha_1 p_2 + p_2\alpha_2 p_1}{(\alpha_2 p_1)^{\alpha_2}(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1}}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u p_1 p_2\left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(\alpha_2 p_1)^{\alpha_2}(\alpha_1 p_2)^{\alpha_1}}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u p_1^{1-\alpha_2} p_2^{1-\alpha_1}\left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2^{\alpha_2}\alpha_1^{\alpha_1}}\right] \\
&\text{Se } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \text{ então } 1 - \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } 1 - \alpha_2 = \alpha_1 \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2^{\alpha_2}\alpha_1^{\alpha_1}}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\left[\frac{1}{\alpha_2^{\alpha_2}\alpha_1^{\alpha_1}}\right] \\
e &= p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + u\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}
\end{aligned} \tag{39}
$$

Generalizando para n bens:

$$
e = \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i + u\prod_i \left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \tag{40}
$$

A Equação 40 é conhecida como função despesa e mostra o gasto mínimo necessário para se obter um nível de utilidade pelo menos igual a u.

Para que o problema de minimização da despesa apresente de fato uma solução mínima local é preciso que todas as derivadas parciais de primeira ordem sejam iguais a zero (o que já foi condicionado no problema) e o determinante da matriz hessiana de derivadas parciais de segunda ordem seja menor que zero[1]. As CSO do problema são:

$$
L_{1,1} = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = -\lambda\alpha_1\underbrace{(\alpha_1 - 1)}_{<0}(x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 2}(x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2} \quad (> 0) \tag{41}
$$

$$
L_{1,2} = \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = -\lambda\alpha_1\alpha_2(x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1}(x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2 - 1} \quad (< 0) \tag{42}
$$

$$
L_{1,\lambda} = \frac{\partial L_1}{\partial \lambda} = -\alpha_1(x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1}(x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2} \quad (< 0) \tag{43}
$$

$$
L_{2,1} = \frac{\partial L_2}{\partial x_1} = -\alpha_1\lambda\alpha_2(x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1}(x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2 - 1} \quad (< 0) \tag{44}
$$

[1] Ver http://users.etown.edu/p/pauls/ec309/lectures/lec07_const.html

$$L_{2,2} = \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = -\lambda \alpha_2 \underbrace{(\alpha_2 - 1)}_{(<0)} (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2 - 2} \quad (> 0) \tag{45}$$

$$L_{2,\lambda} = \frac{\partial L_2}{\partial \lambda} = -\alpha_2 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2 - 1} \quad (< 0) \tag{46}$$

$$L_{\lambda,1} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_1} = -\alpha_1 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2} \quad (< 0) \tag{47}$$

$$L_{\lambda,2} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_2} = -\alpha_2 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1} (x_2 - \gamma_2)^{\alpha_2 - 1} \quad (< 0) \tag{48}$$

$$L_{\lambda,\lambda} = 0 \tag{49}$$

A matriz hessiana de derivadas parciais de segunda ordem tem os seguintes sinais:

$$h = \begin{bmatrix} L_{1,1} > 0 & L_{1,2} < 0 & L_{1,\lambda} < 0 \\ L_{2,1} < 0 & L_{2,2} > 0 & L_{2,\lambda} < 0 \\ L_{\lambda,1} < 0 & L_{\lambda,2} < 0 & L_{\lambda,\lambda} = 0 \end{bmatrix} \tag{50}$$

O determinante da matriz hessiana é:

$$\begin{aligned} |h| &= <<< + >> 0 + <<< -(<< 0 + <>< + ><<) \\ |h| &= < + < -(> + >) \\ |h| &= < -(>) \\ |h| &= < + < \\ |h| &= < \end{aligned} \tag{51}$$

O que mostra que as demandas ótimas apresentadas na Equação 40 são de fato um ponto de mínimo do problema de minimização da despesa do consumidor que possui uma função de utilidade do tipo Stone-Geary.

Para provar que a função despesa obedece o lema de Shephard, considere derivar a Equação 40 em relação a p_i:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial p_i} &= \gamma_i + u \prod_j \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1} \left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \\ &= \gamma_i + u \prod_j \alpha_i^{1-\alpha_i} p_i^{\alpha_i - 1} \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \\ &= \gamma_i + u \prod_j \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{1-\alpha_i} \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \\ & \text{Como } 1 - \alpha_i = \alpha_j \\ &= \gamma_i + u \prod_j \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \\ &= x_i \end{aligned} \tag{52}$$

De acordo com os princípios da dualidade, $e(v) = R$, isto é, o gasto mínimo necessário para se obter a utilidade máxima possível é igual ao orçamento total do consumidor. Para provar, considere substituir u na Equação 40 por v da Equação 26:

$$
\begin{aligned}
e(v) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i + \left[\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\right)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}\right]\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\\
e(v) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i + R - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\\
e(v) &= R
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Os princípios da dualidade ainda afirmam que a utilidade máxima obtida quando o gasto é mínimo é equivalente à utilidade mínima, isto é, $v(e) = u$. Para provar, considere substituir R na Equação 26 por v da Equação 40:

$$
\begin{aligned}
v(e) &= \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i + u\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i\right)\prod_i\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}\\
v(e) &= u\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\prod_i\left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i}\\
v(e) &= u
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Tendo calculado a função despesa e verificado as suas propriedades, é possível obter as variações equivalente e compensatória.

(i) A variação equivalente (VE) é a variação da renda, a preços correntes, que teria o mesmo efeito no bem-estar do consumidor que a variação dos preços, e pode ser computada como:

$$
VE = e(p,u') - e(p,u) \tag{55}
$$

Em que p é o vetor de preços que antecede a mudança de preços, u é a utilidade que ocorre antes da mudança de preços e u' é a utilidade obtida após a mudança dos preços. Para obter a variação equivalente, considere substituir a Equação 40 na Equação 55:

$$
\begin{aligned}
VE &= \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i + u'\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i\gamma_i - u\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\\
VE &= (u'-u)\prod_i\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

(ii) A variação Compensatória (VC) é a quantidade de dinheiro adicional que um agente precisaria para atingir a sua utilidade inicial após uma alteração de preços, e pode ser computada como:

$$
VC = e(p',u') - e(p',u) \tag{57}
$$

$$
\begin{aligned}
VC &= \sum_{i=1}^{n} p_i'\gamma_i + u'\prod_i\left(\frac{p_i'}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i'\gamma_i - u\prod_i\left(\frac{p_i'}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}\\
VC &= (u'-u)\prod_i\left(\frac{p_i'}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Os efeitos substituição (ES) e renda (ER) podem ser obtidos por meio da decomposição da Equação de Slutsky:

$$
\underbrace{\frac{\partial x_i^m}{\partial p_j}}_{ET} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j}}_{ES} \underbrace{-x_j^m\left[\frac{\partial x_i^m}{\partial R}\right]}_{ER}, \quad i,j = 1,\ldots,n \tag{59}
$$

Em que x^m e x^h são as demandas marshalliana (Equação 12) e hickssiana (Equação 38). Assim, o efeito substituição é dado por:

$$\begin{aligned} ES_{i,j} &= \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} \\ &= u\alpha_j \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{1}{p_j}\right) \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\alpha_j} \\ &= u \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right) \left(\frac{\alpha_i p_j}{\alpha_j p_i}\right)^{\alpha_j} \end{aligned} \tag{60}$$

O efeito renda, por sua vez, pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ER_{i,j} &= x_j^m \left[\frac{\partial x_i^m}{\partial R}\right] \\ &= \left[\gamma_j + \frac{\alpha_j(R - \sum_j p_j\gamma_j)}{p_j}\right] \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right) \end{aligned} \tag{61}$$

1 Exercício (resolução em R)

(1:) Suponha uma economia simplificada com 10 bens ($x_1, ..., x_{10}$) homogêneos e altamente substituíveis. Considere que o consumidor representativo gasta a mesma fração do seu orçamento com cada produto e que o consumo mínimo tolerável para ele é de 0,05 unidades para cada produto. Suponha que a renda inicial do consumidor representativo é de \$ 100,00 e que inicialmente cada produto possui um preço unitário ($p_1 = p_2 = ... = p_{10} = 1$). Suponha também que a utilidade do consumidor pode ser modelada de acordo comuma função do tipo Stone-Geary representada na Equação 1. Responda:

(1.1:) Encontre as demandas ótimas por cada produto.

```r
alpha = as.vector(rep(1/10, 10))
gamma = as.vector(rep(0.05, 10))
p = as.vector(rep(1, 10))
r = 100
x = c()

for(i in 1:10){
        x[i] = gamma[i] + alpha[i]*(r - sum(p[i]*gamma[i]))/p[i];
}
print(x)
```

(1.2:) Encontre a utilidade máxima do consumidor:

```r
uu0 = prod((x - gamma)^alpha)
print(uu0)
```

(1.3:) Suponha que o preço do bem x_1 aumente 20% e que os demais parâmetros da economia permaneçam inalterados. Encontre o novo vetor de demandas ótimas do consumidor:

```r
p1 = p #novo vetor de precos
p1[1] = 1.2
```

```r
x1 = c() # novo vetor de demandas

for(i in 1:10){
        x1[i] = gamma[i]+alpha[i]*(r-sum(p1[i]*gamma[i]))/p1[i];
}
print(x1)
```

(1.4:) Encontre a variação na utilidade máxima:

```r
uu1 = prod((x1 - gamma)^alpha)
variacao = 100*(uu1-uu0)/uu0
print(sprintf("%f%%", round(variacao, 2)))
```

(1.5:) Encontre a variação equivalente referente à mudança de preços:

```r
ve = (uu1-uu0)*prod((p/alpha)^alpha)
print(ve)
```

(1.6:) Encontre a variação compensatória referente à mudança de preços:

```r
vc = (uu1-uu0)*prod((p1/alpha)^alpha)
print(vc)
```