O Modelo de Ramnsey-Cass-Koopmans

Prof. Dr. Helson Gomes de Souza

helson.souza@upe.br

1 Introdução

No Modelo de Crescimento de Solow (MCS) supõe-se que as decisões sobre investimento (S) são exógenas e que a taxa de poupança é fixa. Além disso, o MCS é fundamentado basicamente no comportamento da produção e na acumulação de capital, desconsiderando o comportamento e as escolhas das famílias. Neste âmbito, o modelo de Ramnsey-Cass-Koopmans (MRCK) surge como um avanço do MCS, considerando como endógena as decisões de investimento e levando em conta a escolha ótima das famílias.

1.1 Famílias

Considere que a economia opera em um horizonte de planejamento infinito, isto é, as gerações atuais, au tomarem suas decisões, levam em conta o bem-estar das gerações futuras. Considere também que as famílias recebem remuneração do trabalho na forma de salários, recebem renda da remuneração de ativos, compram bens de consumo e poupam por meio da aquisição de ativos. Para simplificar, considere que as famílias são idênticas, recebem o mesmo salário, possuem as mesmas preferências, iniciam no horizonte de planejamento com a mesma quantidade de ativos por pessoa e crescem igualmente em termos populacionais.

Deixe $c(t)$ representar o consumo por pessoa $C(t)/L(t)$, de modo que $L(t) = exp(nt)$ é o número de pessoas e n é a taxa de crescimento populacional. Seja ρ a taxa temporal de preferência, considere que as preferências das famílias podem ser representadas de acordo com uma função de aversão ao risco relativo, isto é, a utilidade das famílias U pode ser representada por:

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{t(n-\rho)} \left[\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \right] \tag{1}$$

Em que θ é o inverso da elasticidade de substituição entre consumo e aquisição de ativos. Deixe $a(t)$ representar o total de ativos por pessoa, $w(t)$ representar o salário médio e $r(t)$ representar a taxa de remuneração dos ativos. Suponha que a renda não consumida é dedicada a aquisição de ativos, de modo que as famílias podem adquirir ou emprestar ativos com saldo de todas as operações de aquisições e empréstimos sendo nulo. A dinâmica da aquisição de ativos pode ser escrita como:

$$\dot{a} = a(r-n) + w(t) - c(t) \tag{2}$$

Em que $\dot{a} = da/dt$. O problema das famílias é maximizar a utilidade representada na Equação 1 sujeito à restrição de recursos expressa na Equação 2 e sujeito às condições de no-ponzi game. A hamiltoniana do problema é:

$$H = e^{t(n-\rho)} \left[\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \right] + v(a(r-n) + w(t) - c(t)) \tag{3}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta} - v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta} \tag{4}$$

$$\dot{v} = \frac{-\partial H}{\partial a} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = v(n-r) \tag{5}$$

Substituindo a Equação 4 na Equação 5:

$$\dot{v} = e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta}(n-r) \tag{6}$$

Diferenciando a Equação 4 em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (n-\rho)e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta} - \theta e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta-1}\dot{c(t)} \\ \dot{v} &= e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta}[n-\rho-\theta c(t)^{-1}\dot{c(t)}] \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo a Equação 7 na Equação 6:

$$\begin{aligned} e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta}[n-\rho-\theta c(t)^{-1}\dot{c(t)}] &= e^{t(n-\rho)}c(t)^{-\theta}(n-r) \\ -\rho-\theta c(t)^{-1}\dot{c(t)} &= -r \\ \theta c(t)^{-1}\dot{c(t)} &= r-\rho \\ \frac{\dot{c(t)}}{c(t)} &= \frac{r-\rho}{\theta} \end{aligned} \tag{8}$$

Em que $\dot{c(t)}/c(t)$ é a taxa de crescimento do consumo por pessoa. Note que, se $r = \rho$, então as famílias aumentarão o consumo por pessoa em uma taxa constante; se $r > \rho$ então as famílias abrirão mão do consumo no período corrente para garantir mais consumo no período futuro, implicando em uma taxa de crescimento positiva para o consumo por pessoa; do contrário, se $r < \rho$ então as famílias consumirão mais no presente e menos no futuro, implicando em uma taxa de crescimento negativa para o consumo por pessoa.

1.2 Firmas

Assim como no MCS, suponha que a tecnologia de produção é aumentadora de trabalho. Deixe $Y(t)$ representar o produto agregado, $K(t)$ representar o estoque de capital agregado e $T(t)$ representar a tecnologia. A função de produção da firma representativa é como:

$$Y(t) = f[K(t), \hat{L(t)}] \quad \text{com } \hat{L(t)} = L(t)T(t) \tag{9}$$

Considere que a tecnologia de produção pode ser representada de acordo com uma função do tipo Cobb-Douglas, de tal modo que:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}\hat{L(t)}^{1-\alpha} \tag{10}$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por $\hat{L(t)}$ para obter a função de produção na forma intensiva:

$$\begin{aligned} \frac{Y(t)}{\hat{L(t)}} &= \frac{K(t)^{\alpha}\hat{L(t)}^{1-\alpha}}{\hat{L(t)}} \\ \frac{Y(t)}{\hat{L(t)}} &= \frac{K(t)^{\alpha}}{\hat{L(t)}^{\alpha}} \\ \hat{y(t)} &= \hat{k(t)}^{\alpha} \end{aligned} \tag{11}$$

O produto marginal do capital é:

$$pmg(\hat{k(t)}) = \frac{\partial \hat{y(t)}}{\partial \hat{k(t)}} = \alpha \hat{k(t)}^{\alpha-1} \tag{12}$$

O objetivo da firma representativa é maximizar o lucro $(\pi(t))$ dado pela diferença entre o valor do produto por pessoa e os gastos com salários e capital. Suponha que uma fração δ do capital por pessoa se deprecia a cada período e que o capital é um ativo que deve ser remunerado a uma taxa r. O problema da firma é:

$$\max \pi(t) = \hat{y(t)} - \hat{k(t)}(r+\delta) - w(t) \tag{13}$$

Derivando em relação a $\hat{k(t)}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(t)}{\partial \hat{k(t)}} &= pmg(\hat{k(t)}) - r - \delta = 0 \\ r &= pmg(\hat{k(t)}) - \delta \end{aligned} \tag{14}$$

Sustituindo na Equação 8, obtém-se a taxa de crescimento de equilíbrio para o consumo por pessoa:

$$\frac{\dot{c(t)}}{c(t)} = \frac{pmg(\hat{k(t)}) - \delta - \rho}{\theta} \tag{15}$$

1.3 A dinâmica do consumo por pessoa

Para encontrar a dinâmica do consumo por pessoa, considere que a tecnologia cresce a uma taxa constante igual a x, isto é, $T(t) = e^{xt}$. Considere também que:

$$\begin{aligned} \hat{c(t)} &= \frac{C(t)}{L(T)T(T)} \quad \text{Como } c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} \\ \hat{c(t)} &= c(t)e^{-xt} \end{aligned} \tag{16}$$

Diferenciando em relação ao tempo obtém-se:

$$\dot{\hat{c(t)}} = \dot{c(t)}e^{-xt} - xc(t)e^{-xt} \tag{17}$$

Pela Equação 8, tem-se que $\dot{c(t)} = c(t)(r-\rho)/\theta$. Substituindo na Equação 17:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{c(t)}} &= \frac{c(t)e^{-xt}(r-\rho)}{\theta} - xc(t)e^{-xt} \quad \text{Substituindo a Equação 16} \\ \dot{\hat{c(t)}} &= \frac{\hat{c(t)}(r-\rho)}{\theta} - x\hat{c(t)} \\ \frac{\dot{\hat{c(t)}}}{\hat{c(t)}} &= \frac{r-\rho-\theta x}{\theta} \quad \text{Substituindo a Equação 14} \\ \frac{\dot{\hat{c(t)}}}{\hat{c(t)}} &= \frac{pmg(\hat{k(t)}) - \delta - \rho - \theta x}{\theta} \end{aligned} \tag{18}$$

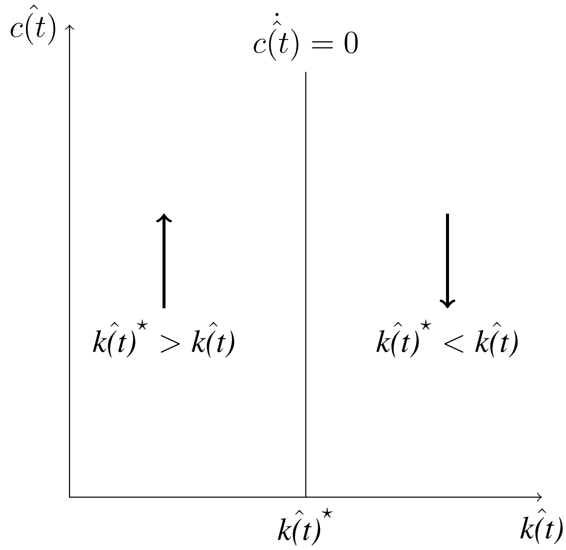
Se $\dot{\hat{c(t)}} = 0$ então:

$$pmg(\hat{k(t)}) = \delta + \rho + \theta x \tag{19}$$

Substituindo a produtividade marginal do trabalho expressa na Equação 12:

$$\begin{aligned}
\alpha \hat{k(t)}^{\alpha-1} &= \delta + \rho + \theta x \\
\hat{k(t)}^{\alpha-1} &= \frac{\delta + \rho + \theta x}{\alpha} \\
\hat{k(t)} &= \left(\frac{\alpha}{\delta + \rho + \theta x}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad \text{Substituindo a Equação 19} \\
\hat{k(t)}^{\star} &= \left(\frac{\alpha}{pmg(\hat{k(t)})}\right)^{1/(1-\alpha)}
\end{aligned} \tag{20}$$

Em que $\hat{k(t)}^{\star}$ é o estoque de capital por pessoa capaz de atingir os objetivos das firmas e das famílias simultaneamente. Note que, para que ocorra $\hat{k(t)}^{\star} > \hat{k(t)}$, então é preciso que $pmg(\hat{k(t)}) < \delta + \rho + \theta x$, o que de acordo com a Equação 18 implica em uma taxa de crescimento negativa para o consumo por pessoa; analogamente, para que ocorra $\hat{k(t)}^{\star} < \hat{k(t)}$, então é preciso que $pmg(\hat{k(t)}) > \delta + \rho + \theta x$, o que de acordo com a Equação 18 implica em uma taxa de crescimento positiva para o consumo por pessoa; Se $\hat{k(t)}^{\star} = \hat{k(t)}$, então é preciso que $pmg(\hat{k(t)}) = \delta + \rho + \theta x$ e a taxa de crescimento do consumo por pessoa é nula. Isto implica em uma dinâmica semelhante a representada na figura a seguir:



1.4 A dinâmica do estoque de capital por pessoa

Considere que a dinâmica do capital corresponde à diferença entre o produto, o consumo e a depreciação do capital, isto é:

$$\dot{K(t)} = Y(t) - C(t) - \delta K(t) \tag{21}$$

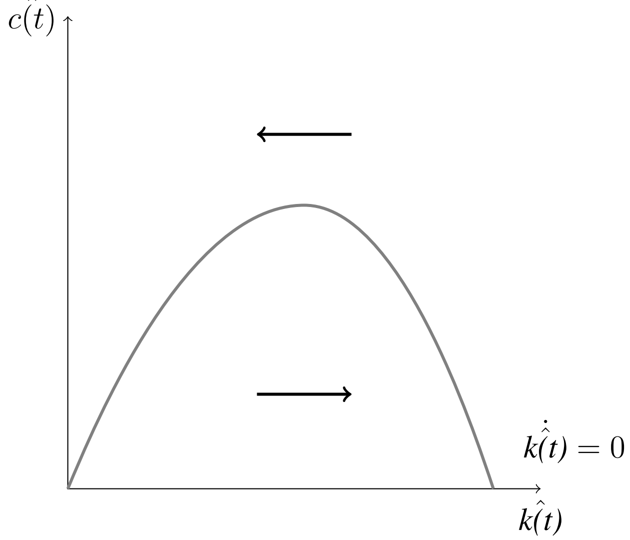
Dado que $\hat{k(t)} = K(t)/L(t)T(t)$, então:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{k(t)}} &= \frac{\dot{K(t)}L(t)T(t) - K(t)[\dot{L(t)}T(t) + L(t)\dot{T(t)}]}{[L(t)T(t)]^2} \\
\dot{\hat{k(t)}} &= \frac{\dot{K(t)}}{L(t)T(t)} - \hat{k(t)}[n+x] \quad \text{Substituindo (21)} \\
\dot{\hat{k(t)}} &= \frac{Y(t) - C(t) - \delta K(t)}{L(t)T(t)} - \hat{k(t)}[n+x] \\
\dot{\hat{k(t)}} &= \hat{y(t)} - \hat{c(t)} - \hat{k(t)}[n+x+\delta] \\
\dot{\hat{k(t)}} &= f(\hat{k(t)}) - \hat{c(t)} - \hat{k(t)}[n+x+\delta]
\end{aligned} \tag{22}
$$

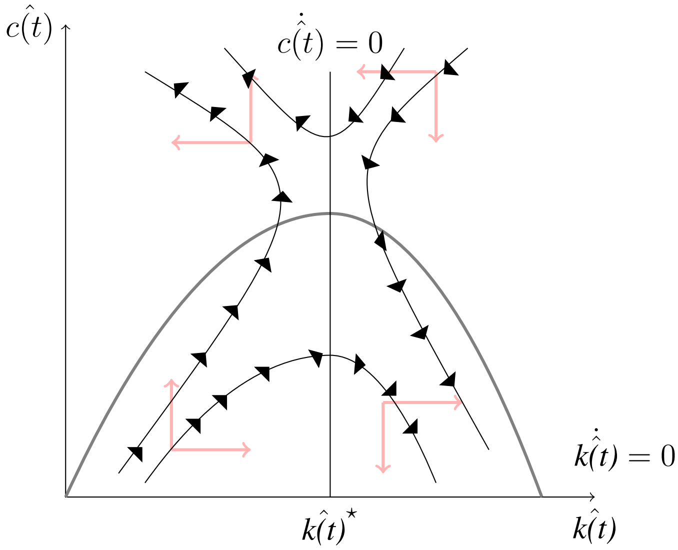
Se $\dot{\hat{k(t)}} = 0$, então:

$$
\hat{c(t)} = f(\hat{k(t)}) - \hat{k(t)}[n+x+\delta] \tag{23}
$$

Note que, se $\hat{c(t)} > f(\hat{k(t)}) - \hat{k(t)}[n+x+\delta]$, então $f(\hat{k(t)}) < \hat{k(t)}[n+x+\delta] + \hat{c(t)}$ e $\dot{\hat{k(t)}} < 0$, o que torna a taxa de crescimento do capital negativa. Em contrapartida, se $\hat{c(t)} < f(\hat{k(t)}) - \hat{k(t)}[n+x+\delta]$, então $f(\hat{k(t)}) > \hat{k(t)}[n+x+\delta] + \hat{c(t)}$ e $\dot{\hat{k(t)}} > 0$, o que torna a taxa de crescimento do capital positiva. Assim, o locus $\dot{\hat{k(t)}} = 0$ pode ser representado como:



Unindo os locus $\dot{\hat{c(t)}} = 0$ e $\dot{\hat{k(t)}} = 0$, obtém-se:



Encontrou algum erro no material? Por gentileza, contate o autor a respeito por meio de um correio eletrônico via helson.souza@upe.br