# Modelo Clássico de Política Monetária

Prof. Dr. Helson Gomes de Souza

helson@alu.ufc.br

## 1 Introdução

A política monetária descreve a maneira pela qual os agentes responsáveis pelo gerenciamento do sistema monetário administram a disponibilidade de liquidez na economia. De uma maneira simplificada, os princípios fundamentais da política monetária são aceitos nas mais diversas teorias macroeconômicas. No entanto, diferentes escolas de pensamento econômico podem considerar suposições distintas acerca da condução da política monetária e os seus efeitos nas variáveis econômicas. Na escola clássica, por exemplo, pressupõe-se uma economia de concorrência perfeita, onde há perfeita e simétrica informação, permitindo que os preços sejam livres para responder imediatamente às alterações na condução da política monetária. Já na visão keynesiana, considera-se que existem imperfeições no mercado que impedem que os preços reajam livremente às decisões das autoridades monetárias, de modo que, dado um choque exógeno de política monetária, o preço de mercado não converge para o seu valor de equilíbrio tão facilmente conforme sugerido pela escola clássica. Como exemplo adicional, os novos keynesianos contestam a simetria de informações e atentam para a rigidez nominal de preços e a importância da política creditícia na credibilidade da política monetária.

A maneira como a política monetária é abordada na teoria econômica também diverge a depender do tipo de abordagem utilizada para fundamentar a teoria. Uma das formas mais comuns e simplificadas de expressar a teoria acerca das implicações da política monetária sobre as variáveis econômicas é usando o modelo IS-LM por meio do uso de suposições fundamentais de alguma escola de pensamento econômico. Neste caso, é preciso modelar o equilíbrio no mercado de bens e serviços e no mercado de ativos, o que permite encontrar uma taxa de juros e um produto de equilíbrio que respondem aos choques de política fiscal e monetária.

No entanto, uma maneira mais robusta de expressar a teoria econômica acerca da política monetária é fundamentar as suposições de uma dada linha de pensamento econômico em uma modelagem de ciclos reais de negócios. Esta abordagem traz algumas vantagens em relação aos métodos matemáticos convencionais de busca pelo equilíbrio econômico, uma vez que permite que os choques de política monetária sejam inseridos nos modelos de equilíbrio de uma maneira estritamente exógena.

Em vista destes conceitos, este breve documento tem o objetivo de expressar os princípios fundamentais do modelo clássico de política monetária, modelando as suposições necessárias em um modelo simplificado de ciclos reais de negócios. É importante destacar que o material que segue trata de uma versão bastante simplificada do modelo clássico eu uma abordagem de ciclos reais de negócios, de modo que as conclusões aqui tomadas, embora estejam de acordo com os princípios da escola clássica, devem ser analisadas com cautela.

## 2 Famílias

Suponha que as famílias são idênticas, possuem as mesmas preferências e podem ser representadas por uma única família representativa. Considere também que as famílias vivem em um horizonte de planejamento infinito e que ofertam trabalho em troca de salário e demandam ativos ao preço equivalente à taxa de remuneração dos ativos. Considere inicialmente que a remuneração do trabalho pode ser dedicada ao consumo e/ou à aquisição de ativos. Para tornar estes pressupostos factíveis, considere que os agentes da economia, incluindo às famílias, demandam moeda tanto pelo motivo transação (para liquidar as transações de consumo) quanto pelo motivo portfólio (para liquidar a demanda por ativos).

Considere que a família representativa possui uma utilidade $(U)$ que pode ser representada como uma função do consumo e do trabalho, tal que:

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, N_t) \tag{1}$$

Em que $C_t$ é o consumo, $N_t$ é a oferta de trabalho e $\beta$ é uma taxa de desconto. Para cumprir os pressupostos de racionalidade, suponha que $U$ é contínua e diferenciável, com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C_t} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial C_t^2} \leq 0 \\ \frac{\partial U}{\partial N_t} \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial N_t^2} \leq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Considere que em cada t-ésimo período do horizonte de planejamento, $P_t$ é o preço do bem consumido, $W_t$ é o salário nominal, $B_t$ é a quantidade de títulos nominalmente sem risco adquiridos em $t$ com vencimento em t+1, $Q_t$ é o preço do título e $T_t$ representa as transferências lump-sum. A restrição de recursos da família representativa é:

$$P_t C_t + Q_t B_t \leq B_{t-1} + W_t N_t - T_t \tag{3}$$

Considere também que os rendimentos dos títulos estão condicionados a uma restrição de *non ponzi game*, tal que:

$$\lim_{T \to \infty} E_t \left[ B_T \right] \geq 0 \tag{4}$$

O problema da família representativa é maximizar 1 sujeito a 3 e 4. Para resolver este problema, considere o lagrangeano da maximização intertemporal da utilidade $(L)$, dado por:

$$L = \mathbb{E}_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[ \beta^t U\left(C_t, N_t\right) + \lambda_t \left(B_{t-1} + W_t N_t - T_t - P_t C_t - Q_t B_t\right) \right] \right\} \tag{5}$$

As condições de primeira ordem para a maximização do problema estabelecem que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial C_t} = \beta^t \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) - \lambda_t P_t = 0 \\ &\lambda_t = \frac{\beta^t}{P_t} \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial N_t} = \beta^t \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial N_t} \right) + \lambda_t W_t = 0 \\ &\lambda_t = -\frac{\beta^t}{W_t} \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial N_t} \right) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial B_t} = -\lambda_t Q_t + E_t[\lambda_{t+1}] = 0 \\ &Q_t = \frac{E_t[\lambda_{t+1}]}{\lambda_t} \end{aligned} \tag{8}$$

Fazendo (6) = (7), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\beta^t}{P_t}\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial C_t}\right) &= -\frac{\beta^t}{W_t}\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial N_t}\right) \\ \frac{W_t}{P_t} &= -\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial N_t}\right)/\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial C_t}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo (6) em (8), obtém-se:

$$Q_t = \frac{E_t\left[\frac{\beta^{t+1}}{P_{t+1}}\left(\frac{\partial U(C_{t+1},N_{t+1})}{\partial C_{t+1}}\right)\right]}{\frac{\beta^t}{P_t}\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial C_t}\right)} \tag{10}$$

Como $E_t[\lambda_t] = \lambda_t$, então:

$$\begin{aligned} Q_t &= E_t\left[\left(\frac{\beta^{t+1}}{P_{t+1}}\right)\left(\frac{P_t}{\beta^t}\right)\left(\frac{\partial U(C_{t+1},N_{t+1})}{\partial C_{t+1}}\right)/\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial C_t}\right)\right] \\ Q_t &= \beta E_t\left[\left(\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)\left(\frac{\partial U(C_{t+1},N_{t+1})}{\partial C_{t+1}}\right)/\left(\frac{\partial U(C_t,N_t)}{\partial C_t}\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

A título de especificação, considere que a família representativa possui a seguinte função de utilidade:

$$U(C_t,N_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \tag{12}$$

Em que $\sigma$ é o inverso da elasticidade de substituição entre consumo e títulos e $\varphi$ é o inverso da elasticidade de substituição entre consumo e lazer. Pelas equações (9) e (11), as condições do otimilaridade do problema da família representativa são:

$$\frac{W_t}{P_t} = C_t^{\sigma} N_t^{\varphi} \tag{13}$$

$$Q_t = \beta E_t\left\{\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right\} \tag{14}$$

A Equação 13 pode ser expressa na forma log-linear como:

$$\begin{aligned} &ln(W_t) - ln(P_t) = \sigma ln(C_t) + \varphi ln(N_t) \\ &w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t \end{aligned} \tag{15}$$

Em que a representação em letras minúsculas descreve o logaritmo natural das variáveis expressas em maiúsculo. Para loglinearizar a Equação 14, considere o seguinte procedimento:

$$\begin{aligned} Q_t &= \beta C_t^{\sigma} E_t\left\{\frac{C_{t+1}^{-\sigma}P_t}{P_{t+1}}\right\} \\ ln(Q_t) &= ln(\beta) + \sigma c_t + E_t\left\{-\sigma c_{t+1} + p_t - p_{t+1}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

Deixe $p_{t+1} - p_t = \pi_{t+1}$ representar o índice de inflação para o período subsequente, implicando em:

$$
\begin{aligned}
&ln(Q_t) = ln(\beta) + \sigma c_t + E_t\left\{-\sigma c_{t+1} - \pi_{t+1}\right\} \\
&ln(Q_t) = ln(\beta) + \sigma c_t - \sigma E_t\{c_{t+1}\} - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \\
&\sigma c_t = ln(Q_t) - ln(\beta) + \sigma E_t\{c_{t+1}\} + E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} \\
&c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(ln(\beta) - ln(Q_t) - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\}\right) \\
&c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right)
\end{aligned} \tag{17}
$$

Em que $i_t \equiv -ln(Q_t)$ representa uma boa aproximação para a taxa nominal de juros e $\rho \equiv -ln(\beta)$. Se no período corrente não há nenhum motivo explícito para que a oferta de moeda seja alterada, então a demanda por encaixes reais pode ser escrita como:

$$
\frac{M_t}{P_t} = Y_t Q_t^{\eta} \tag{18}
$$

Em que $M_t$ é a demanda nominal por moeda, $Y_t$ é o produto e $\eta \geq 0$ é a sensibilidade da demanda por encaixes reais em ralação à taxa de juros. Na forma loglinear, tem-se:

$$
m_t - p_t = y_t - \eta i_t \tag{19}
$$

# 3 Firmas

Assuma que a firma representativa produz usando apenas trabalho $(N_t)$ e tecnologia $(A_t)$, de tal modo que a função de produção assume a seguinte forma funcional:

$$
Y_t = A_t N_t^{1-\alpha} \tag{20}
$$

Deixe $W_t$ representar a remuneração do trabalho, de tal modo que o lucro da firma representativa é dado por:

$$
\mathcal{L}_t = P_t Y_t - W_t N_t \tag{21}
$$

O problema da firma representativa é maximizar (21) sujeito a (20). Para resolver este problema, considere substituir a Equação 20 na Equação 21 e tomar as condições de primeira ordem para a maximização do lucro, de modo a obter:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial N_t} = P_t A_t (1-\alpha) N_t^{-\alpha} - W_t = 0 \\
&\frac{W_t}{P_t} = A_t (1-\alpha) N_t^{-\alpha} \\
&w_t - p_t = a_t - \alpha n_t + ln(1-\alpha)
\end{aligned} \tag{22}
$$

Em que $a_t = ln(A_t)$ é definido por um processo estocástico.

# 4 Equilíbrio

Considere que a economia é fechada e sem governo. Suponha também que o produto da economia é inteiramente dedicado ao consumo, implicando na seguinte condição de equilíbrio:

$$
y_t = c_t \tag{23}
$$

Para formalizar o sistema de equações do modelo, considere expressar a tecnologia de produção na forma log-linear, obtendo:

$$y_t = a_t + (1-\alpha)n_t \tag{24}$$

O modelo é composto pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} w_t - p_t = \sigma c_t + \varphi n_t & (S1) \\ c_t = E_t\{c_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t\left\{\pi_{t+1}\right\} - \rho\right) & (S2) \\ m_t - p_t = y_t - \eta i_t & (S3) \\ w_t - p_t = a_t - \alpha n_t + ln(1-\alpha) & (S4) \\ y_t = c_t & (S5) \\ y_t = a_t + (1-\alpha)n_t & (S6) \end{cases} \tag{25}$$

Para resolver o sistema, considere inicialmente substituir (S1) em (S4), de modo a obter:

$$\begin{aligned} & \sigma c_t + \varphi n_t = a_t - \alpha n_t + ln(1-\alpha) \\ & \text{Substituindo (S5)} \\ & \sigma y_t + \varphi n_t = a_t - \alpha n_t + ln(1-\alpha) \\ & \text{Substituindo (S6)} \\ & \sigma(a_t + (1-\alpha)n_t) + \varphi n_t = a_t - \alpha n_t + ln(1-\alpha) \\ & \sigma a_t + n_t[\sigma(1-\alpha) + \alpha + \varphi] = a_t + ln(1-\alpha) \\ & n_t = \frac{a_t(1-\sigma) + ln(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha) + \alpha + \varphi} \end{aligned} \tag{26}$$

Note que, como $0 < \alpha < 1$, então se $\sigma < 1$ um aumento no uso da tecnologia é suficiente para fazer com que haja um aumento no volume de empregos. Do contrário, quando $\sigma > 1$, então os aumentos nos padrões tecnológicos incidem negativamente sobre o emprego. Quando $\sigma = 1$, entretanto, as alterações tecnológicas não possuem quaisquer efeitos sobre o volume de emprego.

Deixe $\psi_{na} = \frac{1-\sigma}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}$ e $\vartheta_n = \frac{ln(1-\alpha)}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}$ e reescreva a Equação 26 como:

$$n_t = \psi_{na} a_t + \vartheta_n \tag{27}$$

$\psi_{na}$ pode ser interpretado como a elasticidade da demanda por trabalho em relação às mudanças nos padrões tecnológicos. Para obter o produto de equilíbrio, considere substituir $n_t$ em (S6), de modo a obter:

$$\begin{aligned} & y_t = a_t + (1-\alpha)(\psi_{na} a_t + \vartheta_n) \\ & y_t = a_t(1 + \psi_{na}(1-\alpha)) + (1-\alpha)\vartheta_n \\ & y_t = a_t\left[1 + \frac{(1-\alpha)(1-\sigma)}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}\right] + (1-\alpha)\vartheta_n \\ & y_t = a_t\left[\frac{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi+(1-\alpha)(1-\sigma)}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}\right] + (1-\alpha)\vartheta_n \\ & y_t = a_t\left[\frac{(1-\alpha)(\sigma+1-\sigma)+\alpha+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}\right] + (1-\alpha)\vartheta_n \\ & y_t = a_t\underbrace{\left[\frac{1+\varphi}{\sigma(1-\alpha)+\alpha+\varphi}\right]}_{\psi_{ya}} + \underbrace{(1-\alpha)\vartheta_n}_{\vartheta_y} \\ & y_t = a_t\psi_{ya} + \vartheta_y \end{aligned} \tag{28}$$

Como $\sigma > 0, \varphi > 0$ e $\alpha > 0$, então o produto de equilíbrio sempre aumenta quando há um avanço na tecnologia.

Considere também que a taxa real de juros $(r)$ pode ser determinada por meio da diferença entre a taxa nominal de juros e a expectativa de inflação, isto é:

$$r = i_t - E_t[\pi_{t+1}] \tag{29}$$

Substituindo esta condição em (S2) e considerando (S5), obtém-se:

$$\begin{aligned} y_t &= E_t\{y_{t+1}\} - \frac{1}{\sigma}(r - \rho) \\ \frac{r}{\sigma} &= E_t\{y_{t+1}\} - y_t + \frac{\rho}{\sigma} \\ r &= \rho + \sigma E_t\{y_{t+1} - y_t\} \end{aligned} \tag{30}$$

Considere agora substituir o produto de equilíbrio expresso na Equação 28 na equação da taxa real de juros, de modo a obter:

$$\begin{aligned} r &= \rho + \sigma E_t\{a_{t+1}\psi_{ya} + \vartheta_y - a_t\psi_{ya} - \vartheta_y\} \\ r &= \rho + \sigma E_t\{\psi_{ya}(a_{t+1} - a_t)\} \\ r &= \rho + \sigma\psi_{ya}E_t\{\Delta a_{t+1}\} \end{aligned} \tag{31}$$

Note que, se $E_t\{a_{t+1}\} > a_t$ então a taxa real de juros será pressionada para cima, a medida que, se $E_t\{a_{t+1}\} < a_t$, então haverá uma pressão negativa sobre a taxa real de juros da economia.

Por fim, o salário de equilíbrio $(w_t - p_t)$ pode ser obtido substituindo (27) e (28) em (S1), de modo a obter:

$$\begin{aligned} \underbrace{w_t - p_t}_{\omega} &= \sigma(a_t\psi_{ya} + \vartheta_y) + \varphi(\psi_{na}a_t + \vartheta_n) \\ \omega &= a_t[\sigma\psi_{ya} + \varphi\psi_{na}] + \sigma\vartheta_y + \varphi\vartheta_n \\ \omega &= \psi_{\omega a}a_t + \vartheta_\omega \end{aligned} \tag{32}$$

Em que $\psi_{\omega a} = \sigma\psi_{ya} + \varphi\psi_{na}$ e $\vartheta_\omega = \sigma\vartheta_y + \varphi\vartheta_n$. Note que em equilíbrio, as variáveis da economia mudam de acordo com as variações nos padrões tecnológicos. Note também que a dinâmica do produto, da taxa real de juros e do emprego são dados independentemente da política monetária.

# 5 Política monetária e determinação de preços

Para entender como a política monetária determina os preços no modelo clássico, considere inicialmente a equação de Fisher, a qual determina que:

$$i_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t \tag{33}$$

Considere agora que o banco central define uma regra de ajuste para a taxa nominal de juros de acordo com:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t \tag{34}$$

Em que $\phi_\pi > 0$ é a sensibilidade da taxa nominal de juros em relação ao aumento de preços. Substituindo (33) em (34), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t = \rho + \phi_\pi \pi_t \\
&\phi_\pi \pi_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + \underbrace{r_t - \rho}_{\hat{r}_t} \\
&\phi_\pi \pi_t = E_t\{\pi_{t+1}\} + \hat{r}_t \\
&\pi_t = \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)(E_t\{\pi_{t+1}\} + \hat{r}_t)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Portanto, a maneira pela qual a taxa real de juros incide sobre a inflação está fundamentada sobre o valor de $\phi_\pi$, de modo que, se $\phi_\pi > 1$ haverá uma única solução no entorno do estado estacionário, a qual ocorre quando o indicador de inflação é dado por:

$$
\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)^{k+1} E_t\{\hat{r}_{t+k}\} \tag{36}
$$

***Prova:***

Considere uma variável econômica fictícia $\mathbf{y_t}$, a qual é dada como função de outra variável $x_t$ em uma forma funcional semelhante à Equação 35.

$$
\mathbf{y_t} = x_t + aE_t\{\mathbf{y_{t+1}}\}
$$

Com $a$ constante. Suponha que os agentes possuem expectativas racionais, o que permite escrever as suas expectativas de $\mathbf{y_t}$ para $t+1$ como:

$$
E_t\{\mathbf{y_{t+1}}\} = E_t\{x_{t+1}\} + aE_t\{\mathbf{y_{t+2}}\}
$$

Substituindo na equação anterior:

$$
\mathbf{y_t} = x_t + a(E_t\{x_{t+1}\} + aE_t\{\mathbf{y_{t+2}}\})
$$

Por sua vez, a expectativa para $t+2$ é:

$$
E_t\{\mathbf{y_{t+2}}\} = E_t\{x_{t+2}\} + aE_t\{\mathbf{y_{t+3}}\}
$$

Substituindo na equação anterior:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{y_t} = x_t + a(E_t\{x_{t+1}\} + a(E_t\{x_{t+2}\} + aE_t\{\mathbf{y_{t+3}}\})) \\
\mathbf{y_t} = x_t + aE_t\{x_{t+1}\} + a^2E_t\{x_{t+2}\} + a^3E_t\{x_{t+3}\}
\end{gathered}
$$

Generalizando para $N$ períodos:

$$
\mathbf{y_t} = x_t + aE_tx_{t+1} + a^2E_tx_{t+2} + \ldots + a^{N-1}E_tx_{t+N-1} + a^NE_ty_{t+N}
$$

$$
\mathbf{y_t} = \sum_{k=0}^{N-1} a^kE_tx_{t+k} + a^NE_t\mathbf{y_{t+N}}
$$

É comum assumir que:

$$
\lim_{N\to\infty} a^NE_t\mathbf{y_{t+N}} = 0
$$

O que possibilita reescrever a equação anterior como:

$$
\mathbf{y_t} = \sum_{k=0}^{\infty} a^kE_tx_{t+k}
$$

No caso da Equação 35, as expectativas racionais de inflação dos agentes para $t+1$ é:

$$E_t\{\pi_{t+1}\} = \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)(E_t\{\hat{r}_t\} + E_t\{\pi_{t+2}\})$$

Substituindo na Equação 35:

$$\pi_t = \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)\left(\left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)(E_t\{\hat{r}_t\} + E_t\{\pi_{t+2}\}) + \hat{r}_t\right)$$

Adicionando $E_t\{\pi_{t+2}\}, E_t\{\pi_{t+3}\}, ..., E_t\{\pi_{t+N}\}$ na equação anterior, obtém-se:

$$\pi_t = \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)^k E_t\{\hat{r}_{t+k}\} + \left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)^N E_t\{\pi_{t+N}\}\right)$$

Como $\lim_{N\to\infty}(1/\phi_\pi)^N E_t\{\pi_{t+N}\} = 0$:

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\phi_\pi}\right)^{k+1} E_t\{\hat{r}_{t+k}\}$$

Note que, conforme os agentes esperam maiores avanços futuros na taxa real de juros, então ocorrerão maiores elevações nos níveis de preços. Neste caso, o banco central pode fazer com que as taxas de aumento de preços tendam a um patamar específico por meio de medidas que alterem a percepção futura dos agentes sobre a taxa real de juros. É importante postular que, de acordo com a Equação 34, a condição $\phi_\pi > 1$ só ocorre quando o banco central ajusta a taxa nominal de juros em uma medida maior que a unidade visando uma resposta a qualquer mudança na inflação. Esta propriedade é conhecida como *Princípio de Taylor*. Assim, a condição de determinação de preços anteriormente postulada só é válida mediante a aplicabilidade do princípio de Taylor.

Em uma modelagem de ciclos reais de negócios, onde os padrões tecnológicos estão sujeitos a flutuações exógenas, a tecnologia pode ser modelada como um processo autoregressivo tal que $a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t$, com $0 < \rho_a < 1$. Neste caso, o valor de $\hat{r}_t$ pode ser obtido rearranjando a Equação 31 para obter:

$$\begin{aligned}
\underbrace{r - \rho}_{\hat{r}_t} &= \sigma\psi_{ya}E_t\{\Delta a_{t+1}\} \\
\hat{r}_t &= \sigma\psi_{ya}E_t\{a_{t+1} - a_t\} \\
\hat{r}_t &= \sigma\psi_{ya}E_t\{\rho_a a_t + \varepsilon_{t+1} - a_t\} \\
\hat{r}_t &= \sigma\psi_{ya}\underbrace{E_t\{a_t(\rho_a - 1) + \varepsilon_{t+1}\}}_{a_t(\rho_a - 1)} \\
\hat{r}_t &= -\sigma\psi_{ya}a_t(1 - \rho_a)
\end{aligned}$$

O outro caso ocorre quando $\phi_\pi < 1$. Neste caso, o desenvolvimento da Equação 35 pode ser remodelado considerando-se a inflação no termo seguinte como variável de resposta da função. Para tanto, a suposição de previsão perfeita faz-se necessária.

$$\begin{aligned}
\phi_\pi\pi_t &= E_t\{\pi_{t+1}\} + \hat{r}_t \\
\underbrace{E_t\{\pi_{t+1}\}}_{\pi_{t+1}} &= \phi_\pi\pi_t - \hat{r}_t \\
&\text{Adicionando um termo estocástico} \\
\pi_{t+1} &= \phi_\pi\pi_t - \hat{r}_t + \xi_{t+1}
\end{aligned} \tag{37}$$

Em que $E_t\{\xi_{t+1}\} = 0 \ \forall \ t$ é um componente aleatório que captura uma sequência de choques arbitrários. Note que neste caso a inflação futura varia positivamente com a inflação corrente, com

$\phi_\pi$ capturando a persistência do aumento de preços. Note também que a inflação futura possui uma relação inversa com a taxa real de juros corrente. Neste caso, o banco central pode pressionar para baixo a inflação futura usando medidas que impulsionem os juros reais correntes, mantendo a inflação corrente e a persistência inflacionária em patamares pelo menos estáveis.

# 6 Uma opção exógena para a oferta monetária

Considere que o banco central possa operar com uma oferta exógena de moeda $(m_t)$. Como esta determinação exógena da oferta de liquidez determina a inflação e os preços no modelo clássico? Para responder, considere usar a Equação 19 para eliminar a taxa nominal de juros da Equação 29. Este procedimento resulta na seguinte condição:

$$
\begin{aligned}
& m_t - p_t = y_t - \eta(E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t) \\
& \text{Como } \pi_{t+1} = p_{t+1} - p_t \\
& m_t - p_t = y_t - \eta(E_t\{p_{t+1} - p_t\} + r_t) \\
& \text{Como } E_t\{p_t\} = p_t \\
& m_t - p_t = y_t - \eta(E_t\{p_{t+1}\} - p_t + r_t) \\
& p_t(\eta + 1) = m_t + \eta E_t\{p_{t+1}\} - y_t + \eta r_t \\
& p_t = \frac{m_t}{\eta+1} + \frac{\eta E_t\{p_{t+1}\}}{\eta+1} + \underbrace{\frac{\eta r_t - y_t}{\eta+1}}_{u_t} \\
& p_t = \frac{m_t}{\eta+1} + \frac{\eta E_t\{p_{t+1}\}}{\eta+1} + u_t
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Considere agora que $\eta > 0$ e resolva (38) em $k$ passos adiante conforme a prova elaborada para a Equação 36, o que possibilita obter a seguinte regra para os preços vigentes:

$$
p_t = \left(\frac{1}{1+\eta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^k E_t\{m_{t+k}\} + u'_t \tag{39}
$$

Com $u'_t = \sum_{k=0}^{\infty}(\eta/(\eta+1))^k E_t\{u_{t+k}\}$.

***Prova:***

A prova desta resolução segue a mesma lógica da prova apresentada para a Equação 36. Para construí-la basta escrever a Equação 38 na forma $\mathbf{y_t} = x_t + a_t E_t\{\mathbf{y_{t+1}}\}$, isto é:

$$
\underbrace{p_t}_{\mathbf{y_t}} = \underbrace{\frac{m_t}{\eta+1} + u_t}_{x_t} + \underbrace{\frac{\eta}{\eta+1}}_{a_t}\underbrace{E_t\{p_{t+1}\}}_{E_t\{\mathbf{y_{t+1}}\}}
$$

Como demonstrado anteriormente, a resolução deste problema em $k$ passos para a frente gera uma solução equivalente a $\mathbf{y_t} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k E_t x_{t+k}$. Substituindo os valores da $a$, $x$ e $\mathbf{y}$ nesta solução tem-se:

$$
p_t = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^k E_t\left\{\frac{m_{t+k}}{\eta+1} + u_{t+k}\right\}
$$

Como $E_t\{1/(\eta+1)\} = 1/(\eta+1)$, então:

$$
p_t = \left(\frac{1}{\eta+1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^k E_t\left\{m_{t+k}\right\} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^k E_t\{u_{t+k}\}}_{u'_t}
$$

O que resulta em:

$$p_t = \left(\frac{1}{\eta+1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^k E_t\left\{m_{t+k}\right\} + u_t'$$

O que conclui a prova da relação expressa na Equação 39. Perceba que quando a oferta monetária é usada por meio de uma regra exógena, então o nível de preços corrente é determinado de maneira única. Note que, os preços respondem positivamente à oferta corrente de moeda e às expectativas a respeito da base monetária futura, de modo que, maiores incrementos na oferta de moeda ou na expectativa de oferta de liquidez futura implicam consequentemente em maiores níveis correntes de preço.

# 7 Uma versão do modelo com utilidade da política monetária

Uma versão do modelo clássico de política monetária também pode ser facilmente obtida considerando-se a oferta de moeda como componente direto da utilidade das famílias. Para demonstrar, suponha que o consumidor representativo possui preferências que dependem do consumo, da oferta de trabalho e da oferta de moeda, tal que:

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) \tag{40}$$

Com a inclusão da oferta de moeda nas preferências do consumidor representativo, a restrição de recursos da economia passa a ser:

$$P_tC_t + Q_tB_t + M_t \leq B_{t-1} + M_{t-1} + W_tN_t - T_t \tag{41}$$

Deixe $\mathcal{A}_t \equiv B_{t-1}+M_{t-1}$ representar a riqueza total da economia no primeiro período do horizonte de planejamento, o que permite reescrever a restrição de recursos como:

$$P_tC_t + Q_t\mathcal{A}_{t+1} + (1-Q_t)\,M_t \leq \mathcal{A}_t + W_tN_t - T_t \tag{42}$$

Considere agora multiplicar e dividir o termo $(1-Q_t)\,M_t$ por $P_t$, de modo a obter:

$$P_tC_t + Q_t\mathcal{A}_{t+1} + P_t\,(1-Q_t)\left(\frac{M_t}{P_t}\right) \leq \mathcal{A}_t + W_tN_t - T_t \tag{43}$$

Desde que $\lim_{T\to\infty} E_t\left\{\mathcal{A}_T\right\} \geq 0 \ \forall\ t$, então o problema tem uma solução factível. O consumidor representativo busca maximizar (40) sujeito a (43). Neste caso, o lagrangeano do problema é:

$$L = E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) + \lambda\left[\mathcal{A}_t + W_tN_t - T_t - P_tC_t - Q_t\mathcal{A}_{t+1} - P_t\,(1-Q_t)\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\right] \tag{44}$$

É fácil notar que as condições de primeira ordem do problema resultam nas mesmas condições de otimilaridade expressas nas equações (13) e (14). No entanto, uma nova condição surge quando se trata da otimização em relação à demanda real por liquidez. Especificamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial(M_t/P_t)} &= \beta^t\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial(M_t/P_t)}\right) - \lambda P_t\,(1-Q_t) = 0 \\
\lambda &= \beta^t\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial(M_t/P_t)}\right)\left(\frac{1}{P_t\,(1-Q_t)}\right)
\end{aligned} \tag{45}$$

Como $\partial L/\partial C_t$ e $\partial L/\partial N_t$ não se alteram em relação ao caso em que a oferta de moeda não é considerada na função de utilidade, então é possível fazer (45) = (6), de modo a obter:

$$\begin{aligned} \beta^t \left( \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} \right) \left( \frac{1}{P_t (1 - Q_t)} \right) &= \frac{\beta^t}{P_t} \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) \\ \left( \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} \right) \left( \frac{1}{(1 - Q_t)} \right) &= \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) \end{aligned} \tag{46}$$

Suponha agora que os ativos $(\mathcal{A}_t)$, pagam retornos aos detentores de acordo com a seguinte relação:

$$1 - Q_t = 1 - exp\{-i\} \tag{47}$$

O que permite reescrever a Equação 46 como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} \right) \left( \frac{1}{(1 - exp\{-i\})} \right) &= \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) \\ \left( \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} \right) / \left( \frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t} \right) &= 1 - exp\{-i\} \end{aligned} \tag{48}$$

A equação anterior expressa a taxa marginal de substituição entre consumo e demanda por moeda. Note que ela depende positivamente da taxa nominal de juros, de maneira que, maiores taxas de juros elevam a TMS, refletindo uma maior escassez de moeda advinda de uma expansão da demanda por moeda pelo motivo portfólio. Neste caso, as famílias precisam abrir mão de mais unidades de consumo para obter uma unidade adicional de moeda. Em contrapartida, menores taxas nominais de juros reduzem a TMS em consequência da menor demanda por moeda pelo motivo portfólio.

## 7.1 Exemplo com uma utilidade separável

Para exemplificar a funcionalidade do modelo clássico de política monetária com demanda por moeda na função de utilidade, considere o caso em que o consumidor representativo possui preferências separáveis. Especificamente, assuma que as preferências do consumidor representativo podem ser expressas de acordo com a seguinte função de utilidade:

$$U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t\right) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{(M_t/P_t)^{1-\nu}}{1-v} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}. \tag{49}$$

Por meio desta especificação, tem-se que:

$$\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} \tag{50}$$

$$\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} = (M_t/P_t)^{-\nu} \tag{51}$$

Substituindo (50) e (51) em (48), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{(M_t/P_t)^{-\nu}}{C_t^{-\sigma}} &= 1 - exp\{-i_t\} \\ \frac{M_t}{P_t} &= C_t^{\sigma/\nu}(1 - exp\{-i_t\})^{-1/\nu} \end{aligned} \tag{52}$$

Linearizando a equação anterior por meio dos logaritmos, obtém-se:

$$m_t - p_t = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right) c_t - \left(\frac{1}{\nu}\right) log(1 - exp\{i_t\}) \tag{53}$$

É comum aceitar que $log(1 - exp\{i\}) \approx i_t$, o que resulta em:

$$m_t - p_t = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right) c_t - \left(\frac{1}{\nu}\right) i_t \tag{54}$$

Substituindo a condição expressa na Equação 23, obtém-se:

$$m_t - p_t = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right) y_t - \left(\frac{1}{\nu}\right) i_t \tag{55}$$

Note que, se a oferta de moeda aumenta, ao mesmo tempo em que o produto e a taxa de juros se mantém constantes, então a identidade expressa na equação anterior só será válida mediante um aumento no nível geral de preços. Note também que de acordo com este resultado, desde que $\nu > 0$, qualquer expansão na oferta de moeda pode ter o seu efeito reduzido sobre o nível geral de preços mediante um aumento no produto ou uma redução na taxa nominal de juros.

### 7.1.1 Política monetária ótima

Do ponto de vista do banco central, como se dá a escolha da oferta ótima de moeda? Neste caso, o planejador central da política monetária visa maximizar a utilidade do consumidor representativo sujeito à restrição de consumo da economia. Em outras palavras, o problema do banco central é:

$$\max\ U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, NT\right) \quad \text{Sujeito a} \quad C_t = Y_t = A_t N_t^{1-\alpha} \tag{56}$$

O Lagrangeano do problema é:

$$L = U\left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, NT\right) + \lambda[A_t N_t^{1-\alpha} - C_t] \tag{57}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial C_t} - \lambda = 0 \\ \lambda = \left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial C_t}\right) \end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial N_t} + (1-\alpha)\lambda A_t N_t^{-\alpha} = 0 \\ \lambda = -\left(\frac{1}{(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}}\right)\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial N_t}\right) \end{gathered} \tag{59}$$

$$\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial (M_t/P_t)} = 0 \tag{60}$$

Fazendo (58) = (59), obtém-se:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial C_t}\right) = -\left(\frac{1}{(1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha}}\right)\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial N_t}\right) \\ -\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial N_t}\right) / \left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial C_t}\right) = (1-\alpha)A_t N_t^{-\alpha} \end{gathered} \tag{61}$$

Note que, de acordo com a Equação 60, do ponto de vista do banco central a utilidade marginal da oferta de moeda é nula, o que é esperado uma vez que ele detém o absoluto poder da emissão de moeda. Isto implica também no fato de que do ponto de vista do banco central, não há taxa marginal de substituição entre consumo e moeda, uma vez que quaisquer demandas por liquidez da instituição podem ser sanadas com a emissão de moeda pelo próprio órgão.

Ainda considerando a Equação 60, note que em face deste resultado, a condição expressa na Equação 48 só pode ser alcançado caso ocorra:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial U(C_t, M_t/P_t, N_t)}{\partial(M_t/P_t)}\right) / \left(\frac{\partial U(C_t, N_t)}{\partial C_t}\right) = 1 - exp\{-i\} \\
&0 = 1 - exp\{-i\} \\
&exp\{-i\} = 1 \\
&-i = log(1) \\
&i = 0
\end{aligned} \tag{62}$$

Ou seja, a otimização dos objetivos do consumidor representativo e do banco central só pode ser alcançada caso a taxa nominal de juros seja nula. Este princípio é conhecido como *regra de Friedman* e retorna a constatação de que enquanto o custo social de produzir saldos reais é nulo, o custo privado é a taxa nominal de juros. Contudo, a implementação da regra de Friedman pode implicar em uma indeterminação do nível de preços do modelo. Para evitar os efeitos desta indeterminação sobre as variáveis de interesse da economia, o banco central deve definir uma regra para a condução dos juros nominais que vise contornar esta indeterminação. É comum na literatura a sugestão da seguinte regra:

$$i_t = \phi\left(r_{t-1} + \pi_t\right) \tag{63}$$

Com $\pi > 0$. Considerando esta regra em $t + 1$ e aplicando a esperança, obtém-se:

$$E_t\{i_{t+1}\} = \phi r_t + \phi E_t\{\pi_{t+1}\} \tag{64}$$

Como pela Equação 33 tem-se $i_t + E_t\{\pi_{t+1}\} + r_t$, então $E_t\{\pi_{t+1}\} = i_t - r_t$. Substituindo esta condição na equação anterior:

$$\begin{aligned}
E_t\{i_{t+1}\} &= \phi r_t + \phi(i_t - r_t) \\
E_t\{i_{t+1}\} &= \phi i_t
\end{aligned} \tag{65}$$

Mediante a aplicação da regra de Friedman, de acordo com a Equação 63, tem-se:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi\left(r_{t-1} + \pi_t\right) \\
\pi_t &= -r_{t-1}
\end{aligned} \tag{66}$$

Este resultado implica que qualquer regra que faça o banco central ajustar suas configurações de política para garantir que a inflação corrente se mova inversamente, e uma a uma com a taxa de juros real defasada, implicará uma taxa de juros nominal zero e, portanto, uma quantidade eficiente de saldos reais.

# Referências


GALÍ, J. **Monetary policy, inflation, and the business cycle: an introduction to the new Keynesian framework and its applications.** Princeton University Press, 2015.


*Encontrou algum erro no material? Por gentileza, contate o autor a respeito por meio de um correio eletrônico via helson@alu.ufc.br*