O Modelo Básico de Gerações Sobrepostas

Helson Gomes de Souza

helson@alu.ufc.br

1 Introdução

Os modelos convencionais de crescimento geralmente possuem suposições bastante superficiais sobre a distribuição das famílias no horizonte de planejamento. As versões clássicas e novo-clássica dos modelos básicos de crescimento geralmente assumem que as famílias vivem em um horizonte infinito de tempo. Estas suposições limitam a capacidade de delimitar como as mudanças estruturais afetam as famílias em diferentes gerações. O modelo básico de gerações sobrepostas trás um avanço em relação à dispersão do tempo de vida das famílias no horizonte de planejamento por meio da suposição de que os indivíduos nascem, vivem por dois períodos e morrem em seguida, adicionando também algumas suposições importantes para a definição do tempo de vida das famílias.

O modelo básico de gerações sobrepostas parte do pressuposto fundamental de que há uma sobreposição de indivíduos velhos e novos ao longo de cada período. Considera-se, portanto, que o tempo do horizonte de planejamento é discreto de modo que as variáveis do modelo são definidas em $t = 0, 1, 2, ..., T$, em vez de $t \geq 0$. Supõe-se também que L_t indivíduos nascem no período t e que a população cresce a uma taxa constante igual a n, tal como no modelo de Solow. Por definição, tem-se $L_t = (1+n)L_{t-1}$. Como cada geração perdura por dois períodos, então existem L_t indivíduos vivendo no primeiro período e $L_{t-1} = L_t/(1+n)$ no segundo período.

O modelo básico de gerações sobrepostas também cada indivíduo oferta uma unidade de trabalho, de modo que, durante a juventude (primeiro período do horizonte de planejamento), o indivíduo destina a sua renda ao consumo e à poupança. No segundo período de suas vidas, quando são idosos, os indivíduos do modelo básico de gerações sobrepostas apenas consomem a poupança que construíram no primeiro período das suas vidas e os rendimentos advindos desta poupança.

Deixe C_{1t} e C_{2t} representar o consumo no período t para os jovens e idosos, respectivamente. Considere que a utilidade do consumidor no período t depende do seu consumo durante a juventude (C_{1t}) e do seu consumo quando idoso C_{2t+1}. A título de especificação, considere uma utilidade do tipo aversão relativa ao risco, tal que:

$$U_t = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}\right] \qquad \text{Com} \qquad \theta > 0; \rho > -1 \tag{1}$$

Em que ρ é uma taxa de desconto, de modo que, quando maior o seu valor, maior será o consumo futuro em relação ao consumo presente. θ é o coeficiente constante de aversão ao risco relativo e denota o desejo das famílias em postergar o consumo entre diferentes períodos, de tal modo que, o desejo das famílias em deslocar o consumo ao longo do tempo será tão maior quanto menor for o valor de θ. Para garantir que cada indivíduo vive em um horizonte finito de tempo, é necessário assumir que

$$\rho > n + g(1-\theta) \tag{2}$$

Em que g é a taxa de crescimento dos padrões tecnológicos. Nesta modelagem, se $\rho > 0$, então os indivíduos dão maior importância ao consumo no primeiro período em comparação com o segundo período. Analogamente, quando $\rho < 0$ os consumidores dão maior preferência ao consumo quando são idosos.

No que diz respeito à produção, suponha que existem várias firmas idênticas na economia, cada uma delas produzindo no período t um produto Y_t por meio da utilização de capital (K_t), trabalho (L_t) e tecnologia (A_t), de tal modo que a função de produção da firma representativa é $Y_t = f[K_t, A_t, L_t]$. Suponha que a função de produção possui retornos constantes de escala e atende às condições de Inada. Suponha também que a tecnologia cresce a uma taxa constante igual a g, de modo que:

$$A_t = (1 + g)A_{t-1} \tag{3}$$

Suponha também que a economia opera em uma estrutura de mercado perfeitamente competitivo, onde o preço do capital e do trabalho correspondem aos seus respectivos produtos marginais e as firmas operam com lucro zero. Defina $y_t = Y_t/A_tL_t$ e $k_t = K_t/A_tL_t$ como sendo respectivamente o produto e o estoque de capital por unidade de trabalho efetivo, de modo que:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{f[K_t, A_t, L_t]}{A_tL_t} \\ y_t &= f[k_t, 1] \\ y_t &= f(k_t) \end{aligned} \tag{4}$$

Em que A_t é exógeno. A remuneração do capital (r_t) por unidade efetiva de trabalho é dada por:

$$r_t = \frac{\partial y_t}{\partial k_t} = f'(k_t) \tag{5}$$

Já a remuneração do trabalho por unidade efetiva de trabalho (ω_t), pode ser definida a partir da suposição de lucro zero na função lucro, tal que:

$$\begin{aligned} f(k_t) - r_tk_t - \omega_t &= 0 \\ f(k_t) - f'(k_t)k_t - \omega_t &= 0 \\ \omega_t &= f(k_t) - k_tf'(k_t) \end{aligned} \tag{6}$$

Defina ω_tA_t como a renda do trabalho e suponha que no período subsequente, o estoque de capital é equivalente à renda do trabalho não destinada ao consumo no período anterior multiplicado pelo número de trabalhadores, isto é:

$$K_{t+1} = L_t(A_t\omega_t - C_{1t}) \tag{7}$$

2 Famílias

A suposição de que no segundo período as famílias não trabalham e apenas consomem os rendimentos da poupança efetivada no primeiro período pode ser modelada como:

$$C_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(A_t\omega_t - C_{1t}) \tag{8}$$

A restrição orçamentária das famílias pode ser obtida dividindo ambos os lados da equação anterior por $1 + r_{t+1}$, de modo a obter o valor da renda $(A_t\omega_t)$ em função do consumo presente e futuro.

$$\begin{aligned} \frac{C_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} &= A_t\omega_t - C_{1t} \\ A_t\omega_t &= C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} \end{aligned} \tag{9}$$

O objetivo da família representativa é maximiar (1) sujeito à restrição orçamentária imposta em (9). O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = \frac{C_{1t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\left[\frac{C_{2t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}\right] + \lambda\left[A_t\omega_t - C_{1t} - \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}}\right] \tag{10}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1t}} = C_{1t}^{-\theta} - \lambda = 0 \\ &\lambda = C_{1t}^{-\theta} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2t+1}} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right) C_{2t+1}^{-\theta} - \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} = 0 \\ &\lambda = \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right) C_{2t+1}^{-\theta} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = A_t\omega_t - C_{1t} - \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = 0 \tag{13}$$

Fazendo (11) = (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} C_{1t}^{-\theta} &= \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right) C_{2t+1}^{-\theta} \\ \left(\frac{C_{1t}}{C_{2t+1}}\right)^{-\theta} &= \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} \\ \frac{C_{1t}}{C_{2t+1}} &= \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{-1/\theta} \\ \frac{C_{2t+1}}{C_{1t}} &= \left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\theta} \\ C_{2t+1} &= C_{1t}\left(\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right)^{1/\theta} \end{aligned} \tag{14}$$

Substituindo (14) em (13), obtém-se:

$$\begin{aligned} A_t\omega_t &= C_{1t} + \frac{C_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = 0 \\ A_t\omega_t &= C_{1t} + C_{1t}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{1/\theta} (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta} \\ A_t\omega_t &= C_{1t}\left[1 + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{1/\theta} (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}\right] \\ A_t\omega_t &= C_{1t}\left[\frac{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}}\right] \\ C_{1t} &= A_t\omega_t\left[\frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

De acordo com a equação anterior, o consumo presente depende da taxa futura de juros, de tal modo que, o consumo presente será tão maior quanto menor for a taxa de juros futura. Agora defina $s(r)$ como a fração da renda não consumida, denote $r_t = r_{t+1} = r$ e utilize a Equação 15 para obter:

$$
\begin{aligned}
s(r) &= \frac{A_t\omega_t - C_{1t}}{A_t\omega_t} \\
s(r) &= \frac{A_t\omega_t - A_t\omega_t\left[\frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}\right]}{A_t\omega_t} \\
s(r) &= 1 - \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} \\
s(r) &= \frac{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}-(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} \\
s(r) &= \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} \\
s(r) &= \frac{(1+r)^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(1+r)^{(1-\theta)/\theta}}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

A equação anterior mostra que a poupança dos indivíduos jovens é crescente na taxa de juros se e somente se $(1+r)^{(1-\theta)/\theta}$ é decrescente em r. Derivando este termo em relação a r obtém-se:

$$
\frac{\partial(1+r)^{(1-\theta)/\theta}}{\partial r} = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)(1+r)^{(1-2\theta)/\theta} \tag{17}
$$

O que demonstra que $s(r)$ só será crescente em r caso $\theta > 1$. Com isso, Equação 16 mostra que um aumento na taxa de juros resultará em um efeito substituição e um efeito renda. Se θ é baixo, implicando no fato de que os consumidores estão muito dispostos a postergar o consumo ao longo do tempo para tirar proveito dos rendimentos da taxa de juros, então há uma tendência de elevação da poupança em decorrência do efeito substituição. Quando θ é alto, entretanto, e os consumidores estão menos dispostos a abrir mão do consumo presente por mais consumo futuro propiciado pelos rendimentos das taxas de juros, há uma propensão a redução da poupança proveniente do efeito renda.

Como o consumo é a fração da renda não poupada, então é possível fazer:

$$
C_{1t} = (1 - s(r_{t+1}))A_t\omega_t \tag{18}
$$

Esta condição pode ser provada facilmente fazendo $(1 - s(r_{t+1}))A_t\omega_t$ considerando o valor de $s(r)$ da Equação 16, o que resulta na Equação 15.

3 A dinâmica da economia

A dinâmica do estoque de capital pode ser obtida substituindo a Equação 18 na Equação 7, de modo a obter:

$$
\begin{aligned}
K_{t+1} &= L_t(A_t\omega_t - (1 - s(r_{t+1}))A_t\omega_t) \\
K_{t+1} &= s(r_{t+1})A_t\omega_t L_t
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Considere denotar $K_t/A_tL_t = k_t$. Dividindo ambos os lados da equação anterior por $A_{t+1}L_{t+1}$, obtém-se:

$$
\underbrace{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}}_{k_{t+1}} = \frac{s(r_{t+1})A_t\omega_t L_t}{A_{t+1}L_{t+1}} \tag{20}
$$

Dado que $L_t = (1+n)L_{t-1}\ \forall\ t$, então:

$$
\begin{aligned}
1+n &= \frac{L_t}{L_{t-1}} \\
1+n &= \frac{L_{t+1}}{L_t} \\
\frac{L_t}{L_{t+1}} &= \frac{1}{1+n}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Aplicando o mesmo princípio na Equação 3, tem-se:

$$
\frac{A_t}{A_{t+1}} = \frac{1}{1+g} \tag{22}
$$

Substituindo as equações (21) e (22) na Equação 20, obtém-se:

$$
k_{t+1} = \frac{s(r_{t+1})\omega_t}{(1+n)(1+g)} \tag{23}
$$

Substituindo as equações (5) e (6) na Equação 23, obtém-se:

$$
k_{t+1} = \frac{s(f'(k_{t+1}))[f(k_t) - k_t f'(k_t)]}{(1+n)(1+g)} \tag{24}
$$

Note que a expressão anterior denota k_{t+1} como sendo uma função do próprio k_{t+1}. Para contornar esta indefinição matemática, considere assumir uma dada forma funcional para a utilidade e a função de produção. A título de especificação, considere o caso em que a utilidade é logarítmica ($\theta = 1$) e a função de produção é Cobb-Douglas.

4 Dinâmica do modelo com utilidade logarítmica e função de produção Cobb-Douglas

Se a utilidade é logarítmica, então $\theta = 1$ deve ser válido, o que torna a Equação 16 como:

$$
\begin{aligned}
s(r) &= \frac{(1+r)^{(1-1)/1}}{(1+\rho)^{1/1} + (1+r)^{(1-1)/1}} \\
s(r) &= \frac{(1+r)^0}{1+\rho+(1+r)^0} \\
s(r) &= \frac{1}{2+\rho}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Se a função de produção é Cobb-Douglas, então:

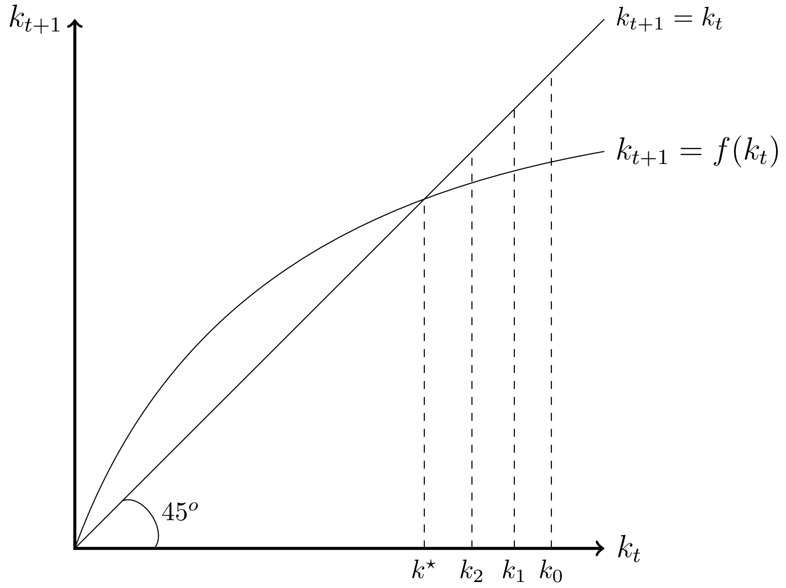
$$
\begin{aligned}
Y_t &= K_t^\alpha [A_t L_t]^{1-\alpha} \\
\frac{Y_t}{A_t L_t} &= \frac{K_t^\alpha [A_t L_t]^{1-\alpha}}{A_t L_t} \\
y_t &= K_t^\alpha [A_t L_t]^{-\alpha} \\
y_t &= \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^\alpha \\
y_t &= k_t^\alpha
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Neste caso, tem-se que $f(k_t) = y_t = k_t^\alpha$ e $f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1}$. Por consequência, tem-se $f(k_{t+1}) = y_{t+1} = k_{t+1}^\alpha$ e $f'(k_{t+1}) = \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}$. Substituindo estes valores na Equação 6, obtém-se o salário ótimo do modelo, dado por:

$$
\begin{aligned}
\omega_t &= k_t^{\alpha} - k_t \alpha k_t^{\alpha-1} \\
\omega_t &= k_t^{\alpha} - \alpha k_t^{\alpha} \\
\omega_t &= k_t^{\alpha}(1-\alpha)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Substituindo a Equação 27 e a Equação 25 na Equação 23, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{\left(\frac{1}{2+\rho}\right) k_t^{\alpha}(1-\alpha)}{(1+n)(1+g)} \\
k_{t+1} &= \frac{k_t^{\alpha}(1-\alpha)}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$



Note que, quando $k_t = 0$, tem-se $k_t = k_{t+1}$. No entanto, este ponto viola o pressuposto de produção não nula, devendo ser desconsiderado na análise do modelo. Quando $0 < k_t < k^\star$, k_{t+1} cresce a uma taxa superior ao crescimento de k_t. Dada a forma funcional da função de produção, a medida que k_t cresce, então k_{t+1} passa a apresentar taxas de crescimento cada vez menores, até chegar ao ponto em que $k_{t+1} = k_t$. A partir deste ponto, se k_t continua crescendo, então a inclinação da linha de 45^o supera a inclinação da curva côncava, indicando que neste caso k_t está crescendo mais do que k_{t+1}.

No modelo básico de gerações sobrepostas, o valor de k_t sempre converge para $k^\star$. Para demonstrar, considere que no período inicial o valor de k_t seja $k_0 > k^\star$. Neste caso, k_{t+1} crescerá a uma taxa menor do que k_t e no próximo período tem-se $k_1 < k_0$. Caso $k_1 > k^\star$, então k_t ainda crescerá a uma taxa maior do que k_{t+1} e no período subsequente tem-se $k_2 < k_1 < k_0$. Este processo se repete até que em um dado período $k_t = k_{t+1} = k^\star$ seja válido.

Portanto, o estado estacionário do modelo ocorre quando $k^\star = k_t = k_{t+1}$. Inserindo esta condição na Equação 28, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{k^{\alpha}(1-\alpha)}{(2+\rho)(1+n)(1+g)} \\
k^{1-\alpha} &= \frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)(1+g)} \\
k^\star &= \left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Substituindo o valor de $k^\star$ na Equação 26, obtém-se o produto do estado estacionário, dado por:

$$y^\star = \left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{30}$$

Substituindo o valor de $k^\star$ na Equação 27, obtém-se o salário do estado estacionário, dado por:

$$\begin{aligned} \omega^\star &= (1-\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \omega^\star &= (1-\alpha)^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{1}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{31}$$

5 A velocidade de convergência

Para definir a velocidade de convergência no modelo básico de gerações sobrepostas, é preciso tomar uma aproximação de Taylor de primeira ordem para a equação de k_{t+1} (Equação 28). Para tanto, faça

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= k_{t+1}|_{k_t=k^\star} + \left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=k^\star}(k_t-k^\star) \\ k_{t+1} &= k^\star + \underbrace{\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=k^\star}}_{\lambda}(k_t-k^\star) \\ k_{t+1} &= k^\star + \lambda(k_t-k^\star) \end{aligned} \tag{32}$$

Uma solução para a equação anterior pode ser obtida via equações diferenciais ordinárias (EDO), que retornam a seguinte solução:

$$k_t - k^\star \approx \lambda^t(k_0 - k^\star) \tag{33}$$

Com k_0 sendo o calor inicial de k. Neste caso, λ é a velocidade de convergência para a taxa de crescimento do estado estacionário. No caso de uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, considerando a Equação 28, o valor de λ é definido como:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t=k^\star} = \left.\frac{\alpha(1-\alpha)k_t^{\alpha-1}}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right|_{k_t=k^\star} \\ \lambda &= \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right)\left(\left(\frac{1-\alpha}{(2+\rho)(1+n)(1+g)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} \\ &\text{Dado que } \forall\ 0<\alpha<1 \Rightarrow (\alpha-1)/(1-\alpha) = -1 \\ \lambda &= \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right)\left(\frac{(2+\rho)(1+n)(1+g)}{1-\alpha}\right) \\ \lambda &= \alpha \end{aligned} \tag{34}$$

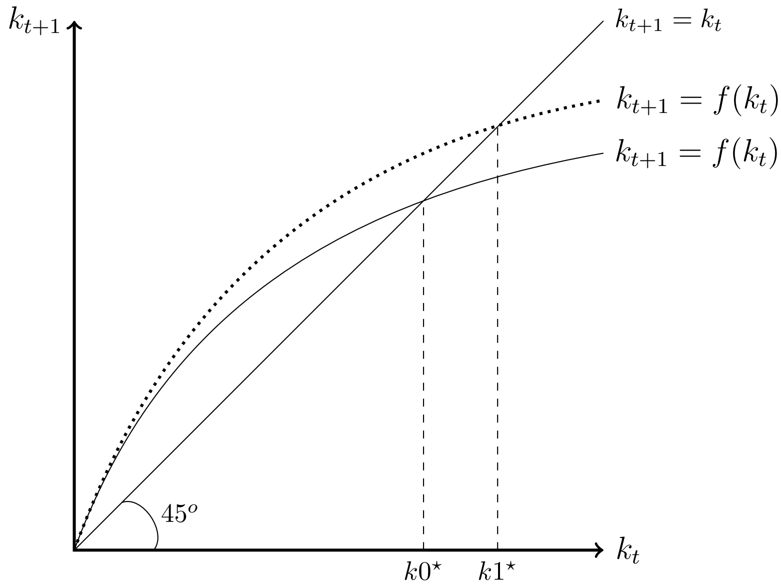
O que demonstra que no modelo básico de gerações obrepostas, quando a utilidade é logarítmica e a função de produção é Cobb-Douglas, o capital por unidade efetiva de trabalho converge para o seu valor estacionário a uma velocidade equivalente a α. Neste caso, desde que $0 < \lambda < 1$, então o sistema converge suavemente para os valores estacionários.

6 Resultados do modelo: Efeitos de uma redução na taxa de desconto

A título de exemplificação dos resultados do modelo básico de gerações sobrepostas, considere a ocorrência de um choque exógeno sobre a taxa de desconto ρ, de tal modo que este choque diminua a taxa de desconto em um dado patamar. Quais as implicações sobre a dinâmica da economia. A figura a seguir retrata este caso.

Pela Equação 28, note que k_{t+1} é negativamente relacionado com a taxa de desconto. Assim, o efeito imediato deste choque é o deslocamento da trajetória côncava para cima, assim como representado pela linha pontilhada. Note que agora a nova trajetória de k_{t+1} implica em um estado estacionário onde k_t é necessariamente maior. Considerando as propriedades da convergência do modelo já citadas, caso a utilidade seja logarítmica e a função de produção seja Cobb-Douglas, uma redução em ρ implica em um crescimento do estoque de capital por unidade efetiva de trabalho, o qual passará de $k0^\star$ para $k1^\star$ a uma velocidade igual a α.

Dado que k_{t+1} é maior com a redução da taxa de desconto, então de acordo com a Equação 27 no estado estacionário o novo salário será maior. No entanto, a Equação 25 implica no fato de que a nova poupança será menor, o que conduz ao fato de que uma redução em ρ eleva o consumo da geração corrente.



Encontrou algum erro no material? Por gentileza, contate o autor a respeito por meio de um correio eletrônico via helson@alu.ufc.br