Nota de aula em fronteira de possibilidades de produção

Prof. Dr. Helson Gomes de Souza

Considere uma economia simplificada em que uma firma representativa produz dois produtos, x e y utilizando apenas dois insumos, o capital K e o trabalho L. Deixe K_x e K_y representarem o montante de capital utilizado na produção dos produtos x e y, respectivamente. De maneira análoga, deixe L_x e L_y representarem o montante de trabalho utilizado na produção dos produtos x e y, respectivamente. Suponha que a disponibilidade de trabalho está limitada a um valor máximo igual a $\bar{L}$ e que a disponibilidade de capital está limitada a um valor máximo igual a $\bar{K}$.

Suponha que a firma representativa desta economia produz de acordo com uma tecnologia de produção do tipo Cobb-Douglas, tal que:

$$x = K_x^{\alpha_x} L_x^{1-\alpha_x} \tag{1}$$

$$y = K_y^{\alpha_y} L_y^{1-\alpha_y} \tag{2}$$

Em que α é o parâmetro de compartilhamento da função de produção. O produtor sempre deseja maximizar a produção de um dos produtos, mas está condicionado à necessidade de produzir o outro produto e à limitação na quantidade de insumos. Estas condições podem ser escritas em um problema de otimização condicionada na seguinte especificação:

$$\begin{aligned}
&\max \quad K_y^{\alpha_y} L_y^{1-\alpha_y} \\
&\text{Sujeito a:} \\
&x = K_x^{\alpha_x} L_x^{1-\alpha_x} \\
&K_x + K_y = \bar{K} \\
&L_x + L_y = \bar{L}
\end{aligned} \tag{3}$$

O lagrangeano deste problema é:

$$\mathcal{L} = K_y^{\alpha_y} L_y^{1-\alpha_y} + \lambda_1[K_x^{\alpha_x} L_x^{1-\alpha_x} - x] + \lambda_2[K_x + K_y - \bar{K}] + \lambda_3[L_x + L_y - \bar{L}] \tag{4}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \lambda_1 \alpha_x K_x^{\alpha_x - 1} L_x^{1-\alpha_x} + \lambda_2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \alpha_y K_y^{\alpha_y - 1} L_y^{1-\alpha_y} + \lambda_2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = \lambda_1 (1-\alpha_x) K_x^{\alpha_x} L_x^{-\alpha_x} + \lambda_3 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_8} = (1-\alpha_y) K_y^{\alpha_y} L_y^{-\alpha_y} + \lambda_3 = 0 \tag{8}$$

Fazendo (5) = (6):

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \alpha_x K_x^{\alpha_x - 1} L_x^{1-\alpha_x} + \lambda_2 = \alpha_y K_y^{\alpha_y - 1} L_y^{1-\alpha_y} + \lambda_2 \\
&\lambda_1 \alpha_x K_x^{\alpha_x - 1} L_x^{1-\alpha_x} = \alpha_y K_y^{\alpha_y - 1} L_y^{1\alpha_y} \\
&\lambda_1 = \frac{\alpha_y K_y^{\alpha_y - 1} L_y^{1-\alpha_y}}{\alpha_x K_x^{\alpha_x - 1} L_x^{1-\alpha_x}}
\end{aligned} \tag{9}$$

Fazendo (7) = (8):

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1-\alpha_x)K_x^{\alpha_x}L_x^{-\alpha_x} + \lambda_3 &= (1-\alpha_y)K_y^{\alpha_y}L_y^{-\alpha_y} + \lambda_3 \\
\lambda_1(1-\alpha_x)K_x^{\alpha_x}L_x^{-\alpha_x} &= (1-\alpha_y)K_y^{\alpha_y}L_y^{-\alpha_y} \\
\lambda_1 &= \frac{(1-\alpha_y)K_y^{\alpha_y}L_y^{-\alpha_y}}{(1-\alpha_x)K_x^{\alpha_x}L_x^{-\alpha_x}}
\end{aligned} \tag{10}$$

Fazendo (9) = (10):

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_y K_y^{\alpha_y-1}L_y^{1-\alpha_y}}{\alpha_x K_x^{\alpha_x-1}L_x^{1-\alpha_x}} &= \frac{(1-\alpha_y)K_y^{\alpha_y}L_y^{-\alpha_y}}{(1-\alpha_x)K_x^{\alpha_x}L_x^{-\alpha_x}} \\
\frac{(1-\alpha_x)K_x^{\alpha_x}L_x^{-\alpha_x}}{\alpha_x K_x^{\alpha_x-1}L_x^{1-\alpha_x}} &= \frac{(1-\alpha_y)K_y^{\alpha_y}L_y^{-\alpha_y}}{\alpha_y K_y^{\alpha_y-1}L_y^{1-\alpha_y}} \\
\frac{(1-\alpha_x)K_x}{\alpha_x L_x} &= \frac{(1-\alpha_y)K_y}{L_y} \\
L_x &= \frac{(1-\alpha_x)K_x L_y}{\alpha_x(1-\alpha_y)K_y} \\
L_x &= \underbrace{\left(\frac{1-\alpha_x}{\alpha_x(1-\alpha_y)}\right)}_{\delta}\left(\frac{K_x L_y}{K_y}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Pelas restrições do problema tem-se que $K_y = \bar{K} - K_x$ e $L_y = \bar{L} - L_x$. Portanto:

$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{\delta K_x(\bar{L} - L_x)}{\bar{K} - K_x} \\
L_x\left[1 + \frac{\delta K_x}{\bar{K} - K_x}\right] &= \frac{\delta K_x \bar{L}}{\bar{K} - K_x} \\
L_x\left[\frac{\bar{K} - K_x + \delta K_x}{\bar{K} - K_x}\right] &= \frac{\delta K_x \bar{L}}{\bar{K} - K_x} \\
L_x\left[\bar{K} + K_x(\delta - 1)\right] &= \delta K_x \bar{L} \\
L_x &= \frac{\delta K_x \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Substituindo na função de produção de x:

$$\begin{aligned}
x &= K_x^{\alpha_x}\left(\frac{\delta K_x \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_x} \\
x &= K_x\left(\frac{\delta \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_x}
\end{aligned} \tag{13}$$

Para obter a produção de y considere:

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\bar{L} - L_x\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\bar{L} - \left[\frac{\delta K_x \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right]\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\frac{\bar{L}(\bar{K} + K_x(\delta - 1)) - \delta K_x \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\frac{\bar{L}\bar{K} + \bar{L}K_x\delta - \bar{L}K_x - \delta K_x \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\frac{\bar{L}\bar{K} - \bar{L}K_x}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right)^{\alpha_y} \left(\frac{\bar{L}(\bar{K} - K_x)}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y} \\
y &= \left(\bar{K} - K_x\right) \left(\frac{\bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Com isso, a firma produzirá uma dada quantidade de x e y conforme a escolha do insumo capital varia na produção de x, de tal modo que a combinação da produção dos dois produtos será:

$$
(x, y) = \left(K_x \left(\frac{\delta \bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_x} \quad ; \quad \left(\bar{K} - K_x\right) \left(\frac{\bar{L}}{\bar{K} + K_x(\delta - 1)}\right)^{1-\alpha_y} \right) \tag{15}
$$

Para representar visualmente, considere que $\alpha_x = 0.5, \alpha_y = 0.5, \bar{K} = 5, \bar{L} = 5$. Este cálculo pode ser executado rapidamente em R fazendo:

```
ftp = function(kbar, kx, lbar, ax, ay){
delta = (1-ax)/(ax*(1-ay))
x = kx*(((delta*lbar)/(kbar+kx*(delta-1)))^(1-ax))
y = (kbar-kx)*((lbar/(kbar+kx*(delta-1)))^(1-ay))
output = c(x,y)
return(output)
}
```

```
for(i in 0:5){
print(round(ftp(kbar = 5, kx = i, lbar = 5, ax = 0.5, ay = 0.5),2))
}
```

Tem-se:

K_x	x	y
0	0	5
1	1.29	3.65
2	2.39	2.53
3	3.35	1.58
4	4.22	0.75
5	5	0

Note que a produção de x aumenta em detrimento da produção de y quando o produtor opta por alocar mais capital no processo de produção de x. O que graficamente corresponde a: