Teoria da produção: Aplicações em uma função de produção CES

Prof. Helson Gomes de Souza

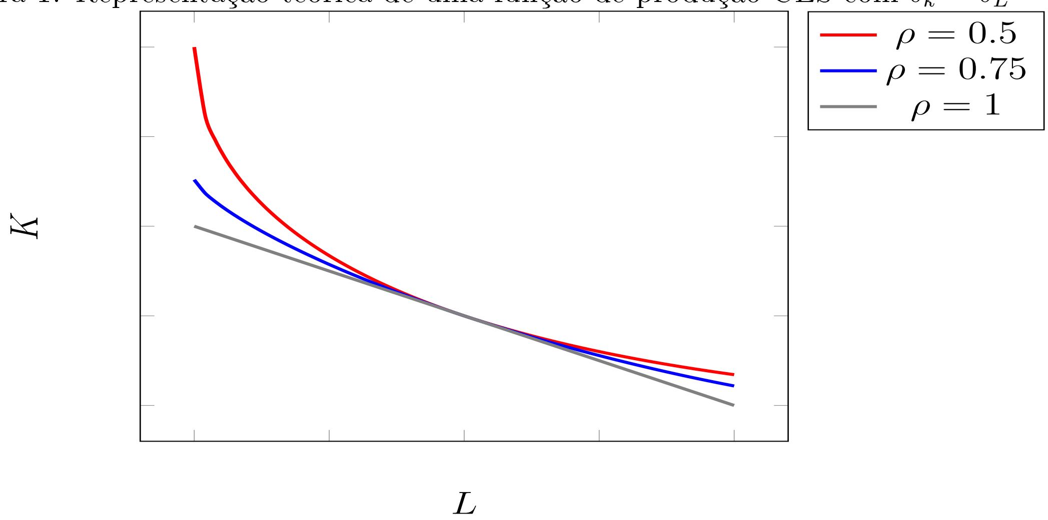
1 Caso 1: Longo prazo

Considere que a firma representativa da economia produz usando apenas dois insumos, capital (K) e trabalho (L). Suponha que a firma representativa opera em um estágio de produção em que é possível adaptar as suas plantas de produção às características da economia, de modo que as quantidades utilizadas de todos os insumos são variáveis, isto é, suponha que a firma representativa opera no longo prazo. Considere que o produto Y possui um preço de oferta P. Deixe W representar a remuneração do trabalho e L a taxa de remuneração do capital. Suponha que no processo de produção a firma substitui capital por trabalho de acordo com uma função de elasticidade de substituição constante (CES), sendo:

$$Y = [\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho]^{1/\rho} \tag{1}$$

Em que δ_k e δ_l representam a participação do capital e do trabalho, respectivamente, no custo total (RT) de produção e ρ é a elasticidade de substituição entre K e L.

Figura 1: Representação teórica de uma função de produção CES com $\delta_k = \delta_L = 0,5$.



Ao preço P, a receita total da firma representativa é:

$$RT = PY \tag{2}$$

E o custo total de produção é (CT):

$$CT = rK + WL \tag{3}$$

Em consequência, o lucro da firma representativa (π) é:

$$\pi = PY - rK - WL \tag{4}$$

A firma otimizadora busca minimizar o seu custo total sujeito, entretanto, a uma restrição de produção não nula. Assim, o problema da firma maximizadora é:

$$\begin{gathered}\min CT = rK + WL \\ \text{Sujeito a:} \\ Y \leq \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{1/\rho}\end{gathered} \tag{5}$$

Supondo uma solução interior para o problema, o lagrangeano é:

$$\mathcal{L} = rK + WL + \lambda(Y - \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{1/\rho}) \tag{6}$$

As condições de primeira ordem (CPO) são:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{\lambda}{\rho}\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \rho \delta_k K^{\rho-1} = 0 \\ &\lambda = \frac{r}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1}}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = W - \frac{\lambda}{\rho}\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \rho \delta_L L^{\rho-1} = 0 \\ &\lambda = \frac{W}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1}}\end{aligned} \tag{8}$$

$$Y = \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{1/\rho} \tag{9}$$

Fazendo $\lambda = \lambda$, isto é, fazendo Equação 7 = Equação 8, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\frac{r}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1}} = \frac{W}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1}} \\ &\frac{r}{W} = \frac{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1}}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1}} \\ &\frac{r}{W} = \frac{\delta_k K^{\rho-1}}{\delta_L L^{\rho-1}} \\ &K^{\rho-1} = \frac{r\delta_L L^{\rho-1}}{W\delta_k} \\ &K = L\left[\frac{r\delta_L}{W\delta_k}\right]^{1/(\rho-1)} \\ &K = L\left[\frac{W\delta_k}{r\delta_L}\right]^{1/(1-\rho)} \\ &\text{Considere } \sigma = \frac{1}{1-\rho} \\ &K = L\left(\frac{W}{r}\right)^\sigma \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^\sigma\end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo a Equação 10 na Equação 9:

$$
\begin{aligned}
Y^\rho &= \delta_k \left[L \left(\frac{W}{r}\right)^\sigma \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^\sigma \right]^\rho + \delta_L L^\rho \\
Y^\rho &= \delta_k L^\rho \left(\frac{W}{r}\right)^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^{\sigma\rho} + \delta_L L^\rho \\
Y^\rho &= L^\rho \left[\delta_k \left(\frac{W}{r}\right)^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^{\sigma\rho} + \delta_L \right]
\end{aligned} \tag{11}
$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \frac{1}{1-\rho} \\
&\sigma(1-\rho) = 1 \\
&\sigma - \rho\sigma = 1 \\
&\rho\sigma = \sigma - 1
\end{aligned} \tag{12}
$$

Substituindo a Equação 12 na Equação 11:

$$
\begin{aligned}
Y^\rho &= L^\rho \left[\delta_k \left(\frac{W}{r}\right)^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^{\sigma} \left(\frac{\delta_L}{\delta_K}\right) + \delta_L \right] \\
Y^\rho &= L^\rho \left[\left(\frac{W}{r}\right)^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^{\sigma} \delta_L + \delta_L \right] \\
Y^\rho &= L^\rho \delta_L \left[\left(\frac{W}{r}\right)^{\sigma\rho} \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^{\sigma} + 1 \right] \\
Y^\rho &= L^\rho \delta_L \left[\frac{W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma}{r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma} + 1 \right] \\
Y^\rho &= L^\rho \delta_L \left[\frac{W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma}{r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma} \right] \\
Y^\rho &= L^\rho (\delta_L)^{1-\sigma} \left[\frac{W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma}{r^{\sigma\rho}} \right] \\
Y^\rho (\delta_L)^{\sigma-1} r^{\sigma\rho} &= L^\rho \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right) \\
Y^\rho (\delta_L)^{\sigma\rho} r^{\sigma\rho} &= L^\rho \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right) \\
Y (\delta_L)^{\sigma} r^{\sigma} &= L \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{1/\rho} \\
L &= Y (\delta_L)^{\sigma} r^{\sigma} \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho}
\end{aligned} \tag{13}
$$

A Equação 13 é a equação da demanda por trabalho. Note que a demanda por trabalho varia positivamente com o produto e inversamente com o salário. Substituindo a Equação 13 na Equação 10:

$$
\begin{aligned}
K &= Y (\delta_L)^{\sigma} r^{\sigma} \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho} \left(\frac{W}{r}\right)^\sigma \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^\sigma \\
K &= Y W^\sigma (\delta_k)^{\sigma} \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho}
\end{aligned} \tag{14}
$$

A 14 é a equação da demanda por capital. Note que a demanda por capital varia positivamente com o produto e inversamente com a taxa de remuneração do capital. Substituindo as equações 13 e 14 na função objetivo do problema, obtém-se a função custo (CT):

$$
\begin{aligned}
CT &= rYW^\sigma (\delta_k)^\sigma \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho} + WY(\delta_L)^\sigma r^\sigma \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho} \\
CT &= \underbrace{Y \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma \right)^{-1/\rho}}_{a} \underbrace{\left[rW^\sigma(\delta_k)^\sigma + Wr^\sigma(\delta_L)^\sigma \right]}_{b}
\end{aligned} \tag{15}
$$

A Equação 15 é a equação da função custo e mostra o gasto total com insumos necessário para minimizar o custo de produção de acordo com uma tecnologia de produção do tipo CES. Se a função de produção é derivável, então a função custo deve obedecer o Lema de Shephard, o qual estipula que $\partial CT/\partial r = K$ e $\partial CT/\partial Wr = L$. Para facilitar as próximas análises, considere dividir a função custo em dois termos, a e b, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial r} &= \frac{-Y}{\rho}\left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^{\sigma} + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^{\sigma}\right)^{(-1-\rho)/\rho}\rho\sigma r^{\sigma\rho-1}(\delta_L)^{\sigma} \\ &= -Y\left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^{\sigma} + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^{\sigma}\right)^{(-1-\rho)/\rho}\sigma r^{\sigma\rho-1}(\delta_L)^{\sigma} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial W} &= \frac{-Y}{\rho}\left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^{\sigma} + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^{\sigma}\right)^{(-1-\rho)/\rho}\rho\sigma W^{\sigma\rho-1}(\delta_k)^{\sigma} \\ &= -Y\left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^{\sigma} + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^{\sigma}\right)^{(-1-\rho)/\rho}\sigma W^{\sigma\rho-1}(\delta_k)^{\sigma} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{\partial b}{\partial r} = W^{\sigma}(\delta_k)^{\sigma} + \sigma W r^{\sigma-1}(\delta_L)^{\sigma} \tag{18}$$

$$\frac{\partial b}{\partial W} = \sigma r W^{\sigma-1}(\delta_k)^{\sigma} + r^{\sigma}(\delta_L)^{\sigma} \tag{19}$$

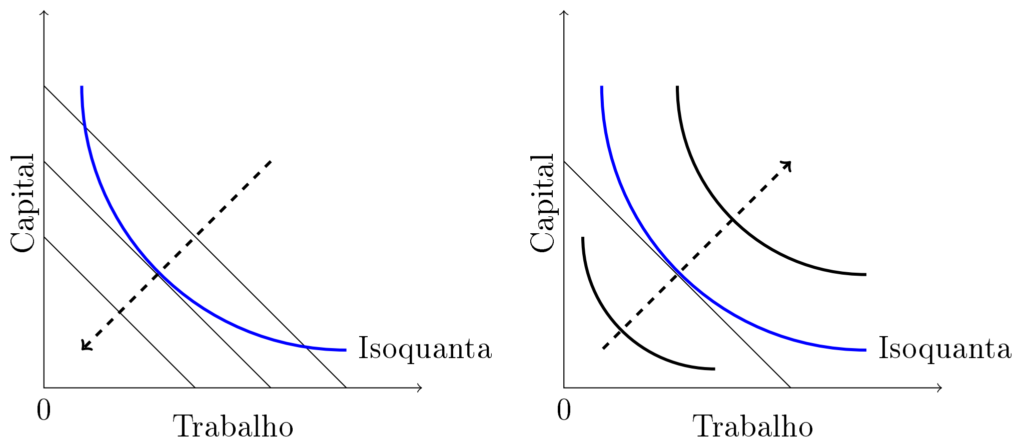
Desafio (i): *Usando as equações 16, 17, 18 e 19, mostre que a função custo apresentada na Equação 15 obedece o lema de Shephard.*

Em vez de minimizar o custo total de produção, a firma competitiva pode ter como objetivo maximizar o seu lucro. Neste caso, o problema da firma é:

$$\max \quad \pi = PY - rk - WL \quad \text{Sujeito a:} \quad Y \geq [\delta_k K^{\rho} + \delta_L L^{\rho}]^{1/\rho} \tag{20}$$

A diferença entre a minimização de custos e a maximização de lucros é que no primeiro caso a firma busca operar na mais baixa linha de isocusto possível, mas precisa atender um determinado nível de produção situado em uma dada isoquanta; já no caso da maximização do lucro, o objetivo da firma é operar na mais elevada isoquanta possível, estando limitada, contudo, a uma determinada linha de isocusto.

(b) Minimização dos custos (b) Maximização do lucro



Supondo uma solução interior para o problema apresentado na Equação 20, o lagrangeano do problema pode ser escrito como:

$$\mathcal{L} = PY - rk - WL + \lambda(Y - [\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho]^{1/\rho}) \tag{21}$$

As CPO são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = -r - \lambda \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-r}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1}} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -W - \lambda \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-W}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1}} \tag{23}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = Y - \left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{1/\rho} = 0 \tag{24}$$

Fazendo $\lambda = \lambda$:

$$\begin{aligned}
&\frac{-r}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_k K^{\rho-1}} = \frac{-W}{\left[\delta_k K^\rho + \delta_L L^\rho\right]^{(1-\rho)/\rho} \delta_L L^{\rho-1}} \\
&\frac{r}{W} = \frac{\delta_k K^{\rho-1}}{\delta_L L^{\rho-1}} \\
&K^{\rho-1} = \frac{r \delta_L L^{\rho-1}}{W \delta_k} \\
&K = L \left(\frac{W}{r}\right)^\sigma \left(\frac{\delta_k}{\delta_L}\right)^\sigma
\end{aligned} \tag{25}$$

Substituindo a Equação 25 na Equação 24 chega-se a conclusão de que as demandas por capital e trabalho do problema de maximização do lucro são semelhantes às demandas por capital e trabalho do problema de minimização de custos. Substituindo as demandas ótimas na Equação 20 obtém-se a função lucro de longo prazo, a qual mostra o lucro máximo obtido pela firma dado uma tecnologia de produção do tipo CES:

$$\pi^\star = PY - \underbrace{Y \left(W^{\sigma\rho}(\delta_k)^\sigma + r^{\sigma\rho}(\delta_L)^\sigma\right)^{-1/\rho}}_{a} \underbrace{\left[rW^\sigma(\delta_k)^\sigma + Wr^\sigma(\delta_L)^\sigma\right]}_{b} \tag{26}$$

Se a função de produção é derivável, então a função lucro da firma otimizadora deve obedecer o Lema de Hotelling, o qual afirma que $\partial\pi/\partial P = Y$, $-\partial\pi/-\partial r = K$ e $\partial\pi/\partial W = L$.

Desafio (ii): *Usando as equações 16, 17, 18 e 19, mostre que a função lucro apresentada na Equação 20 obedece o lema de Hotelling.*

2 Caso 2: O curto prazo

No curto prazo não há flexibilidade para que os produtores ajustem totalmente as plantas de produção às características da economia. Por este motivo, alguns dos insumos são utilizados em quantidades fixas. Para representar este caso, suponha que o fator trabalho seja fixo em um valor $\bar{L}$. Com isso, o problema de minimização de custos da firma competitiva no curto prazo é:

$$\begin{gathered}
\min CT = rK + W\bar{L} \\
\text{Sujeito a:} \\
Y \leq \left[\delta_k K^\rho + \delta_L \bar{L}^\rho\right]^{1/\rho}
\end{gathered} \tag{27}$$

Se existe uma solução interior para o problema, então a demanda pelo insumo variável pode ser obtida isolando K na equação de restrição atendida na igualdade, isto é:

$$\begin{aligned} Y &= \left[\delta_k K^\rho + \delta_L \bar{L}^\rho\right]^{1/\rho} \\ K^\rho &= \frac{Y^\rho - \delta_L \bar{L}^\rho}{\delta_k} \\ k &= \left(\frac{Y^\rho - \delta_L \bar{L}^\rho}{\delta_k}\right)^{1/\rho} \end{aligned} \tag{28}$$

Substituindo $\bar{L}$ e 28 na função objetivo do problema obtém-se:

$$CT_{cp} = r\left(\frac{Y^\rho - \delta_L \bar{L}^\rho}{\delta_k}\right)^{1/\rho} + W\bar{L} \tag{29}$$

A Equação 29 é a equação da função custo de curto prazo. Note que ao derivar CT_{cp} em relação a r obtém-se a demanda por capital de curto prazo apresentada na Equação 29, ao mesmo tempo que, derivando CT_{cp} em relação a W obtém-se a demanda por trabalho de curto prazo, o que demonstra que a função custo de curto prazo no caso de uma função de produção do tipo CES obedece o lema de Shephard.

Caso o objetivo da firma competitiva no curto prazo seja maximizar o lucro, então o problema de otimização passa a ser:

$$\begin{gathered} \max \pi = PY - rK - W\bar{L} \\ \text{Sujeito a:} \\ Y \leq \left[\delta_k K^\rho + \delta_L \bar{L}^\rho\right]^{1/\rho} \end{gathered} \tag{30}$$

A resolução do problema é semelhante ao caso em que o objetivo é a minimização de custos e a demanda pelo insumo variável é a mesma obtida na Equação 28. Substituindo a demanda por capital na função objetivo da Equação 30, obtém-se:

$$\pi_{cp} = PY - r\left(\frac{Y^\rho - \delta_L \bar{L}^\rho}{\delta_k}\right)^{1/\rho} - W\bar{L} \tag{31}$$

Note que $\partial\pi_{cp}/\partial P = Y, -\partial\pi_{cp}/\partial r = K$ e $\partial\pi_{cp}/\partial W = \bar{L}$, o que demonstra que a função lucro obedece o lema de Hotelling.

3 Exercício

Suponha uma empresa competitiva operando em um cenário de longo prazo de acordo com uma função de produção do tipo ces com os seguintes parâmetros:

Y	1000
ρ	0,5
δ_K	0,5
δ_L	0,5
W	50
r	1
P	4

Questão 1: Encontre a demanda por capital, a demanda por trabalho, o custo total e o lucro da firma competitiva.

```
demanda = function(y, sigma, rho, d1, d2, w, r, p){
sigma = 1/(1-rho)
K=y*((w^sigma)*(d1^sigma)*((w^(sigma*rho))*(d1^sigma)+(r^(sigma*rho))*(d2^sigma))^(-1/rho))
L=y*((r^sigma)*(d2^sigma)*((w^(sigma*rho))*(d1^sigma)+(r^(sigma*rho))*(d2^sigma))^(-1/rho))
ct = r*K + w*L
pi = p*y - ct
resultado = data.frame(Capital = K, Trabalho = L, custo = ct, lucro = pi)
return(resultado)
}

q1 = demanda(y = 1000, rho = 0.5, d1 = 0.5, d2 = 0.5, w = 50, r = 1, p = 4)
print(q1)
```

Questão 2: Suponha que a taxa de remuneração do capital aumente em 50%, de modo que os demais parâmetros da economia permanecem constantes. Encontre o preço que a firma competitiva deve cobrar para manter o lucro no mesmo patamar que antecedia a mudança.

```
demanda2 = function(y, sigma, rho, d1, d2, w, r){
        sigma = 1/(1-rho)
        K = y*((w^sigma)*(d1^sigma)*((w^(sigma*rho))*(d1^sigma) + (r^(sigma*rho))*(d2^sigma))^(-1/rho))
        L = y*((r^sigma)*(d2^sigma)*((w^(sigma*rho))*(d1^sigma) + (r^(sigma*rho))*(d2^sigma))^(-1/rho))
        ct = r*K + w*L
        p = (q1[[4]] + ct)/y
        pi = p*y - ct
        resultado = data.frame(Capital = K, Trabalho = L, custo = ct, lucro = pi, preco = p)
        return(resultado)
}

q2 = demanda2(y = 1000, rho = 0.5, d1 = 0.5, d2 = 0.5, w = 50, r = 1.5)
print(q2[5])
```

Questão 3: Suponha que diante do aumento na taxa de remuneração do capital a firma competitiva opte por elevar a proporção do trabalho nos custos de produção em 20%. Mostre o efeito desta mudança sobre o lucro.

```
q3 = demanda(y = 1000, rho = 0.5, d1 = 0.4, d2 = 0.6, w = 50, r = 1.5, p = q2[[5]])
variacao = round(100*(q3[[4]] - q2[[4]])/q2[[4]],2)
print(paste(variacao, "%", sep = " "))
```

Questão 4: Considere o cenário inicial da economia. Suponha que haja a implementação de uma política de salário mínimo que estabeleça que as firmas não podem pagar um salário inferior a \$ 60,00. Simule os efeitos desta política sobre a demanda por trabalho.

```
q4 = demanda(y = 1000, rho = 0.5, d1 = 0.5, d2 = 0.5, w = 60, r = 1, p = 4)
cat(sprintf("Variacao na demanda por trabalho: %s", paste(round(100*(q4[[2]]-q1[[2]])/q1[[2]], 2), "%")))
```

Questão 5: Diante da política de salário mínimo apresentado na questão anterior, suponha que o governo interponha uma lei proibindo os empregadores de demitir os funcionários. Simule os efeitos destas intervenções sobre o lucro da firma representativa.

```
demanda5 = function(y, sigma, rho, d1, d2, w, r, p){
        sigma = 1/(1-rho)
        K = y*((w^sigma)*(d1^sigma)*((w^(sigma*rho))*(d1^sigma) + (r^(sigma*rho))*(d2^sigma))^(-1/rho))
        L = q1[[2]]
        ct = r*K + w*L
        pi = p*y - ct
        resultado = data.frame(Capital = K, Trabalho = L, custo = ct, lucro = pi)
        return(resultado)
}

q5 = demanda5(y = 1000, rho = 0.5, d1 = 0.5, d2 = 0.5, w = 60, r = 1, p = 4)
variacao = 100*(q5[[4]] - q1[[4]])/q1[[4]]
print(paste(round(variacao, 2), "%", sep = ""))
```