Tópicos em Teoria Microeconômica: Escolha Envolvendo Risco

Prof. Helson Gomes de Souza

1 Introdução

Algumas escolhas feitas pelos agentes econômicos envolvem risco. Estas decisões são tomadas em um ambiente de incerteza e podem ser capturadas por probabilidades objetivas. A maneira mais básica e didática de teorizar a escolha envolvendo risco é por meio da teoria das ***hipóteses de utilidade esperada***, desenvolvida inicialmente por John von Neumann e Oskar Morgenstern. Em resumo, esta teoria parte do princípio de que os indivíduos avaliam perspectivas incertas de acordo com o seu nível esperado de utilidade, isto é, quando uma escolha envolve risco, as decisões dos agentes são tomadas com base em uma expectativa de utilidade após a decisão.

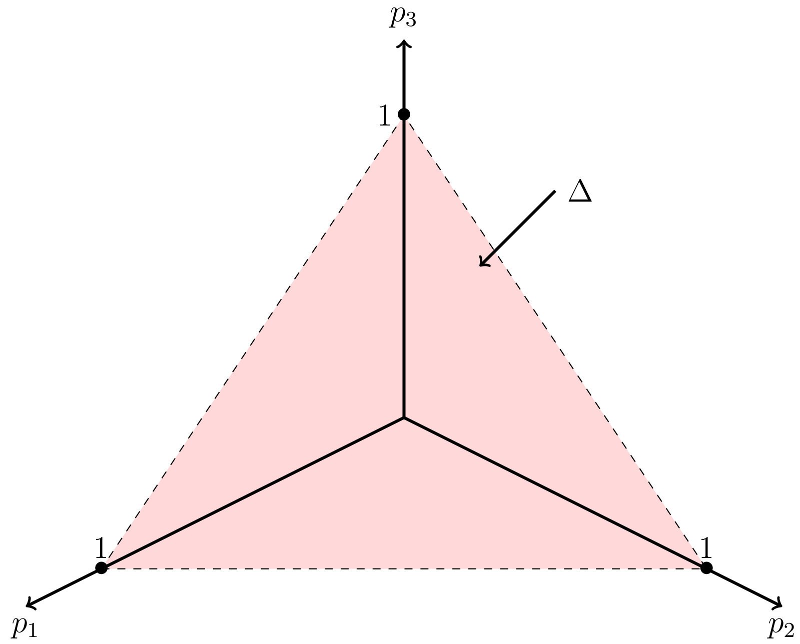
2 A utilidade esperada

2.1 O conjunto de possibilidades de escolha

Quando a tomada de decisões é feita em um ambiente de certeza, o conjunto de possibilidades de escolha (conjunto de consumo) reflete todas as cestas de mercadorias sobre os quais se assume que um consumidor tem preferências. Para a tomada de decisões sob risco, contudo, o conjunto de possibilidades de escolha deve ser redefinido. Para exemplificar, suponha que um dado consumidor precisa escolher um entre três prêmios denotados por $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Defina como ***loteria*** (p) o conjunto de probabilidades associadas à escolha de cada prêmio, sendo $p = \{p_1, p_2, p_3\}$, em que p_i é a probabilidade de o consumidor escolher o prêmio $i = 1, 2, 3$, com $\sum_i p_i = 1$, de modo que $p_i < 0$ e $p_i > 1$ não é factível.

Existem infinitas loterias que refletem diferentes combinações de probabilidades de escolha para cada prêmio. O problema da escolha do consumidor envolvendo risco é escolher uma dentre estas infinitas loterias que irá maximizar a sua utilidade esperada. Com isso, quando as decisões são tomadas em um ambiente de risco e incerteza, o conjunto possibilidades de escolha (Δ) reflete o conjunto de todas as loterias factíveis para os prêmios visados pelo consumidor. A Figura 1 demonstra teoricamente o conjunto de possibilidades de escolha para uma decisão envolvendo três prêmios.

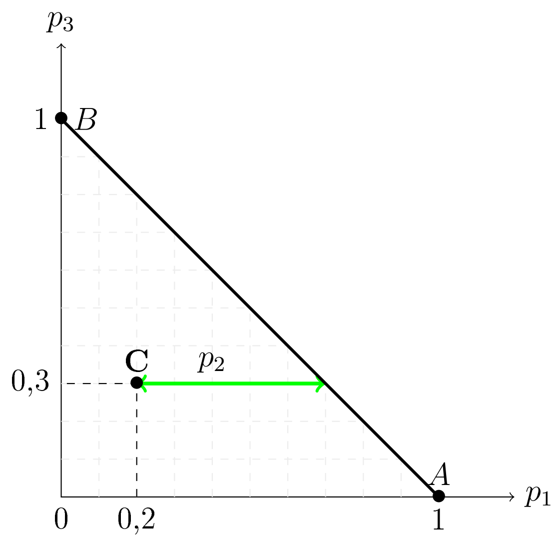
Figura 1: Representação teórica do conjunto de possibilidades de escolha.



Para facilitar a análise, suprima um dos eixos da Figura 1 (eixo p_2), obtendo a representação detalhada na Figura 2. O triângulo OAB é conhecido como **triângulo de Marschak** e reflete uma maneira simplificada de representar um duas dimensões o conjunto de possibilidades de escolha. Neste caso, o eixo horizontal representa as probabilidades relacionadas ao pior prêmio (x_1), enquanto o eixo vertical representa as probabilidades relacionadas ao melhor prêmio (x_3).

Dado que a soma das probabilidades totaliza 1, o ponto A no triângulo de Marschak representa a loteria (1, 0, 0), enquanto o ponto B representa a loteria (0, 0, 1) e a origem representa a loteria (0,1,0). O ponto C, por exemplo, representa uma loteria em que as probabilidades de escolha de x_1 e x_3 são de 0,2 e 0,3, respectivamente. Em consequência, para este ponto a probabilidade associada ao prêmio x_2 é $p_2 = 1 - p_1 - p_3 = 0,5$. Esta probabilidade pode ser representada pela distância euclidiana entre o ponto C e a hipotenusa do triângulo OAB.

Figura 2: Representação teórica do triângulo de Marschak.



2.2 Preferências

Assim como no caso em que as decisões são tomadas em um ambiente de certeza, na escolha sob incerteza as preferências devem obedecer alguns axiomas que as tornem matematicamente factíveis e que possibilitem que as preferências dos agentes obedeçam os pressupostos básicos da teoria microeconômica. Especificamente, seja $\succsim$ uma relação de preferência sobre loterias, então $\succsim$ deve obedecer os seguintes axiomas:

- **Reflexividade:** Para qualquer $p \in \Delta$, uma loteria p é pelo menos tão boa quanto ela mesma, isto é, $p \succsim p$.
- **Totalidade:** o agente conhece todas as loterias no conjunto de possibilidades de escolha e pode compará-las, isto é, para quaisquer duas loterias $p, q \in \Delta$, $p \succsim q$ ou $q \succsim p$ deve ocorrer.
- **Transitividade:** As preferências são distintas e não se cruzam em nenhum ponto de Δ, isto é, para quaisquer três loterias distintas p, q e r em Δ, se $p \succsim q$ e $q \succsim r$, então $p \succsim r$ deve ocorrer.
- **Independência:** Sejam p, q e r três loterias distintas em Δ, se $p \succsim q$, então uma combinação entre p e r deve ser pelo menos tão boa quanto uma combinação entre q e r, isto é, $\forall\ p, q$ e $r \in \Delta$ se $p \succsim q$ e se $0 \leq t \leq 1$ é uma constante, então $tp + (1-t)r \succsim tq + (1-t)r$.
- **Continuidade:** As preferências são contínuas em todo o seu domínio, isto é, para quais quer três loterias distintas p, q e r em Δ e seja $0 \leq t \leq 1$ uma constante, se $p \succsim q$ e $q \succsim r$, então $q\tilde{t}p + (1-t)r$ deve ocorrer.

• **Teorema 1:** *Teorema da utilidade esperada*
Se as preferências do consumidor para com as loterias obedecem os axiomas anteriormente citados, então:

1. Existe uma função de utilidade conhecida como função de utilidade de von Neumann-Morgenstern (vNM) $u(x)$, para o conjunto de prêmios X.
2. As preferências do consumidor sobre as loterias podem ser representadas por uma função de utilidade esperada V, que pode ser expressa como:

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \tag{1}$$

É importante destacar duas propriedades do teorema da utilidade esperada. Primeiro, o teorema é válido para quaisquer transformações monotônicas positivas v, da vNM, desde que $v = au(x)+b$ com $a > 0$. Em outras palavras, as preferências por loterias se mantém inalteradas caso cada uma das utilidades dos prêmios seja substituída por $v(x_i) = au(x_i) + b$. Segundo, devido ao fato de que os temos de $u(x_i)$ são constantes multiplicativas, *a função de utilidade esperada é linear nas probabilidades*.

Dado que as preferências do consumidor sobre loterias podem ser representadas pur uma função UE $V(p)$, então é possível obter a curva de indiferença do consumidor a partir do triângulo de Marschak. Para tanto, considere o exemplo de três prêmios ilustrados anteriormente; deixe $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ e considere $p_2 = 1 - p_1 - p_3$. Feito isso, a Equação 1 pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
V(p) &= p_1u(x_1) + (1 - p_1 - p_3)u(x_2) + p_3u(x_3) \\
V(p) &= p_1[u(x_1) - u(x_2)] + p_3[u(x_3) - u(x_2)] + u(x_2)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Note que na Equação 2 o valor de p_2 está implícito, o que proporciona a elaboração de uma curva de indiferença de duas dimensões. Para tanto, considere fixar o valor de $V(p)$ em $\bar{V}$ e isolar p_3 na Equação 2, obtendo:

$$
\begin{aligned}
\bar{V} &= p_1[u(x_1) - u(x_2)] + p_3[u(x_3) - u(x_2)] + u(x_2) \\
p_3[u(x_3) - u(x_2)] &= \bar{V} + p_1[u(x_2) - u(x_1)] - u(x_2) \\
p_3 &= \frac{\bar{V} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} + p_1\left(\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right)
\end{aligned} \tag{3}
$$

O primeiro termo da Equação 3 é o intercepto vertical da curva de indiferença, enquanto a parte entre parênteses do segundo termo reflete a inclinação da curva. Note que a curva de indiferença sobre loterias é linear e positivamente inclinada. Para representar graficamente, considere obter os interceptos da curva, fazendo:

- Se $p_1 = 0$, então:

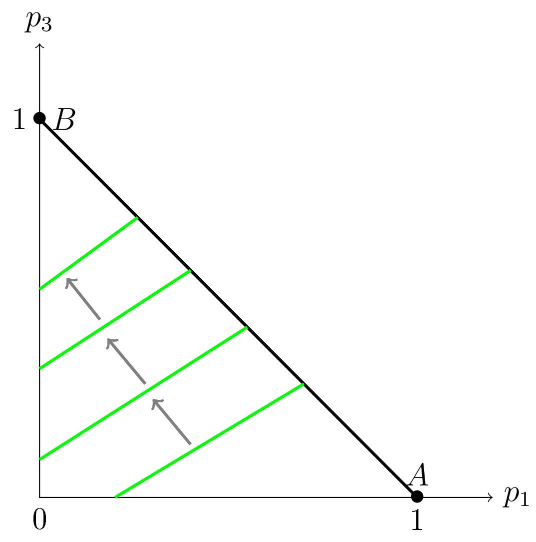
$$
p_3^\star = \frac{\bar{V} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)} \tag{4}
$$

- Se $p_3 = 0$, então:

$$
p_1^\star = \left(\frac{\bar{V} - u(x_2)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) \bigg/ \left(\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right) \tag{5}
$$

$p_3^\star$ e $p_1^\star$ são os interceptos vertical e horizontal da curva de indiferença do consumidor sobre loterias. Note que, quanto maior a utilidade esperada ($\bar{V}$), maior será o valor dos interceptos vertical e horizontal, implicando no fato de que a curva de indiferença se desloca para cima a medida que a utilidade esperada aumenta. A representação teórica da curva de utilidade sobre loterias está apresentada na Figura 3.

Figura 3: Representação teórica da curva de indiferença sobre loterias.



2.3 Atitude frente ao risco

Inicialmente, assuma que um consumidor é racional caso ele busque maximizar a sua utilidade esperada vNM. Para representar o comportamento do consumidor racional frente ao risco, considere o caso em que X é um conjunto de prêmios monetários tal que:

$$X = \{x_1 = 6400, x_2 = 9100, x_3 = 10000\} \tag{6}$$

Suponha que inicialmente a riqueza do consumidor é de $x_3 = 10000$, mas que existe um risco implícito de 25% de que a sua riqueza seja reduzida em \$ 3600 para $x_1 = 6400$. Esta loteria pode ser descrita como $p = (0,25; 0, 0,75)$, indicando que o consumidor possui \$ 6400 com probabilidade de 0,25 ou \$ 10000 com probabilidade de 0,75. Assim, o valor da riqueza esperada do consumidor com a loteria p é de:

$$V(p) = 0,25 * 6400 + 0 * 9100 + 0,75 * 10000 = 9100 \tag{7}$$

Quando duas loterias resultam no mesmo valor esperado de riqueza, então diz-se que estas loterias são mutualmente justas. Para exemplificar, suponha uma loteria $q = (0, 1, 0)$ para o mesmo conjunto de prêmios expressos na Equação 6. Neste caso, a loteria q resulta em uma utilidade esperada de $0 * 6400 + 1 * 9100 + 0 * 10000 = 9100$, o que corresponde ao mesmo valor da utilidade esperada da loteria p. Assim, diz-se que p e q são mutualmente justas.

Diz-se que um consumidor é ***averso ao risco*** se dada a escolha entre uma loteria com valor esperado de p e receber de certeza o valor esperado de p, então ele opta pela última opção. Em outras palavras, o consumidor averso ao risco sempre prefere receber de certeza um valor do que optar por uma loteria com este mesmo valor esperado. No caso do exemplo citado, para o consumidor averso ao risco $V(q) > V(p)$, uma vez que em q o rendimento de \$9100 é garantido, ao contrário de p, onde há um risco implícito de 25% de um prêmio inferior.

Para um consumidor averso ao risco, a função de utilidade vNM deve ser côncava, ao passo que um consumidor não averso ao risco possui uma utilidade vNM convexa. Para demonstrar, considere as loterias p e q anteriormente citadas. Para que $q > p$ é preciso que:

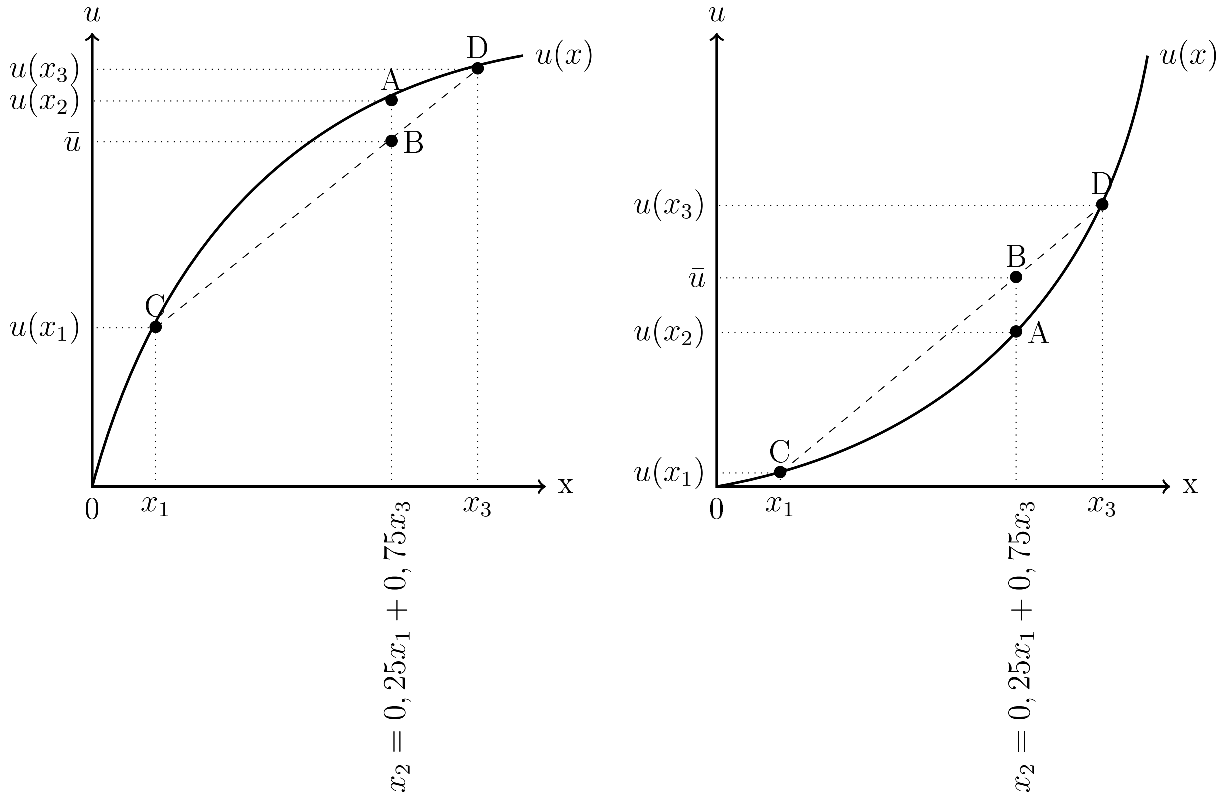
$$u(x_2) > \underbrace{0,25u(x_1) + 0,75u(x_3)}_{\bar{u}} \tag{8}$$

Em que $\bar{u}$ é uma média ponderada entre x_1 e x_3. O primeiro painel da Figura 4 mostra a representação da utilidade vNM para um consumidor averso ao risco, de modo que, o lado esquerdo da Equação 8 ($u(x_2)$) é representado pelo ponto A, enquanto o lado direito é representado pelo ponto B. O eixo vertical representa as utilidades vNM para cada prêmio, enquanto o eixo x representa os prêmios. Para que a desigualdade exposta na Equação 8 seja verdadeira, o ponto A precisa necessariamente estar situado acima do ponto B, o que só é possível se a utilidade vBM for côncava.

Já o segundo painel mostra a utilidade vNM para um consumidor **não averso ao risco** (ou amante do risco). Neste caso, o consumidor prefere a loteria em vez da certeza do prêmio, o que torna $\bar{u} > u(x_2)$, condição esta que só é possível se a utilidade vNM for côncava.

Além da aversão e da não aversão ao risco, o consumidor pode ser **neutro ao risco**. Neste caso, a função de utilidade vNM é linear e assume a forma $u(x) = ax \; \forall \;\; a > 0$. Neste caso o consumidor é indiferente entre a loteria e a certeza do prêmio.

Figura 4: Utilidade vNM para um consumidor averso e não averso ao risco.



2.4 Dominância estocástica

Em alguns casos é possível comparar algumas loterias e averiguar se uma dada loteria é melhor (ou pior) que outra. Por exemplo, considerando os prêmios demonstrados na Equação 6, uma loteria $p = (0, 1, 0)$ é pior do que uma loteria $q = (0, 0, 1)$, uma vez que a loteria q atribui uma certeza para o maior prêmio, enquanto a loteria p postula certeza para o menor prêmio. Se uma lotaria é melhor do que outra em algum sentido, então diz-se que a melhor loteria domina estocasticamente a pior loteria. Esta classificação é conhecida como dominância estocástica e pode ser classificada em dois tipos, a dominância estocástica de primeira ordem e a dominância estocástica de segunda ordem.

2.4.1 dominância estocástica de primeira ordem

Considere um conjunto de prêmios $X = x_1, x_2, x_3$ tal que $x_3 > x_2 > x_1$. Dadas duas loterias distintas r e q, diz-se que domina estocasticamente q em primeira ordem se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $r_1 < q_1$ e $r_1 + r_2 = q_1 + q_2$, o que implica em $r_2 > q_2$.

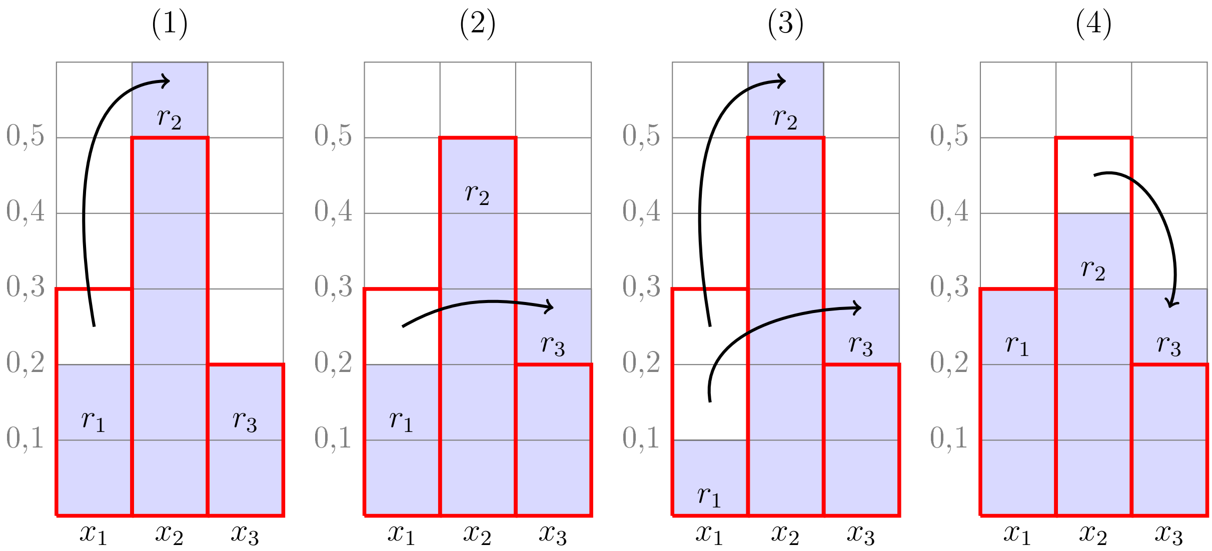
2. $r_1 < q_1$ e $r_1 + r_2 < q_1 + q_2$, o que implica em $r_3 > q_3$.

3. $r_1 = q_1$ e $r_1 + r_2 < q_1 + q_2$, o que implica em $r_3 > q_3$.

A Figura 5 mostra cada uma dessas possibilidades em um histograma probabilístico. Em cada painel, a área destacada de vermelho mostra o histograma da loteria $q = (0,3; 0,5; 0,2)$, enquanto a área azul é o histograma da loteria $r = (r_1, r_2, r_3)$. O painel (1) mostra a primeira condição da dominância estocástica fraca, na qual ao mudar de q para r, a massa de probabilidade passa de x_1 para x_2; Os painéis (2) e (3) representam a segunda condição da dominância estocástica fraca, mostrando que quando o consumidor migra de q para r, a massa de probabilidades passa de x_1 para x_2 ou de x_1 para x_3; Já o painel (4) mostra a terceira condição da dominância estocástica fraca, onde é possível notar que quando o consumidor escolhe r em vez de q, a massa de probabilidade sai de x_2 para x_3.

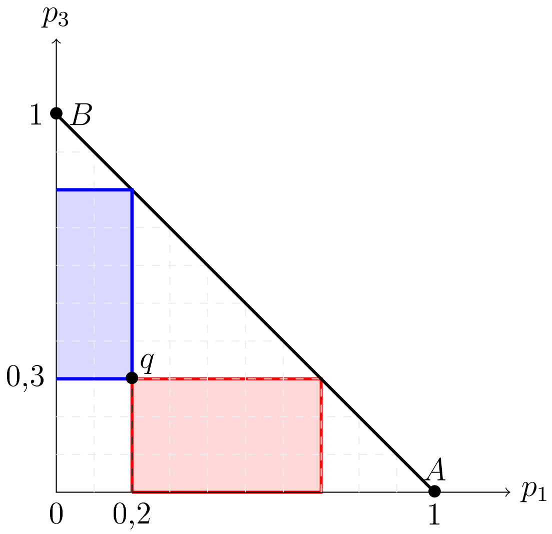
Em cada um desses casos, há dominância estocástica fraca de r sobre q, uma vez que ao optar por r em vez de q, a massa de probabilidades muda dos piores para os melhores prêmios, repassando a intuição de que a loteria r é melhor do que a loteria q, uma vez que r possui maiores chances de obtenção dos melhores prêmios, enquanto q possui maiores chances da obtenção dos piores prêmios.

Figura 5: Representação teórica da dominância estocástica de primeira ordem.



Esta condição é facilmente visualizada no triângulo de Marschak. Para demonstrar, considere a loteria q apresentada no painel (1), com $q = (0,3; 0,5; 0,2)$. Note que a curva de indiferença referente ao ponto q está à esquerda e acima de qualquer loteria no retângulo vermelho, enquanto qualquer curva de indiferença contida no retângulo azul estará acima e à esquerda da curva de indiferença a que pertence o ponto q. Assim, qualquer loteria contida no retângulo azul irá dominar estocasticamente em primeira ordem a loteria q, ao passo que toda loteria contida no retângulo vermelho será estocasticamente dominada em primeira ordem pela loteria q.

Figura 6: Dominância estocástica fraca no triângulo de Marschak.



2.4.2 Dominância estocástica de segunda ordem

Novamente, deixe $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ com $x_3 > x_2 > x_1$ representar o conjunto de prêmios. Diz-se que uma loteria q domina estocasticamente em segunda ordem uma outra loteria r se q e r possuem o mesmo valor esperado, porém, $q_1 > r_1$ e $q_3 > r_3$. Em outras palavras, a dominância estocástica de segunda ordem ocorre quando duas loterias distintas possuem a mesma utilidade esperada, no entanto, a loteria dominada possui maiores probabilidades de obtenção tanto dos melhores quanto dos piores prêmios. Assim, a loteria dominante de segunda ordem possui o mesmo valor esperado da loteria dominada de segunda ordem, sendo, entretanto, mais arriscada.

Para exemplificar, considere um conjunto de prêmios X e duas loterias, r e q, tais que:

$$\begin{aligned} X &= \{0, 50, 100\} \\ q &= (0,3; 0,4; 0,3) \\ r &= (0,2; 0,6; 0,2) \end{aligned} \tag{9}$$

A utilidade esperada da loteria q é:

$$V_q = 0,3 * 0 + 0,4 * 50 + 0,3 * 100 = 50 \tag{10}$$

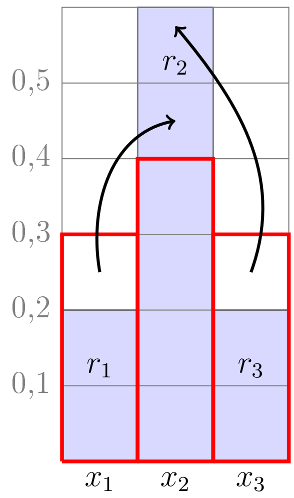
A utilidade esperada da loteria r é:

$$V_r = 0,2 * 0 + 0,6 * 50 + 0,2 * 100 = 50 \tag{11}$$

Note que ambas as loterias possuem a mesma utilidade esperada, no entanto, a probabilidade de obtenção do melhor prêmio (100) é maior para a loteria q, ao mesmo passo que, contudo, a loteria q também possui a maior probabilidade de obtenção do menor prêmio (0). Assim, pode-se concluir que a loteria r é estocasticamente dominada em segunda ordem pela loteria q, uma vez que q é mais arriscada do que r e ambas possuem a mesma utilidade esperada.

A Figura 7 mostra a dominância estocástica de segunda ordem em termos da massa de probabilidades. A parte azul denota o histograma de probabilidades da loteria r, enquanto a parte destacada em vermelho mostra o histograma de probabilidades da loteria q. Note que, no instante em que o consumidor migra de q para r a massa de probabilidade se desloca dos prêmios melhores e piores para os prêmios de valor intermediário. Com isso, diz-se que a loteria q é uma *disseminação da média preservada* de r e r é dominada estocasticamente em segunda ordem por q.

Figura 7: Dominância estocástica de segunda ordem.



A dominância estocástica de segunda ordem pode ser facilmente visualizada por meio das linhas de iso-valor esperado das loterias no triângulo de Marschak. Para tanto, considere escrever a utilidade esperada de q (V_q), tomando $(V_q) = \bar{u}_q$ como um valor constante, e denotando $q_2 = 1 - q_1 - q_3$, de modo a obter:

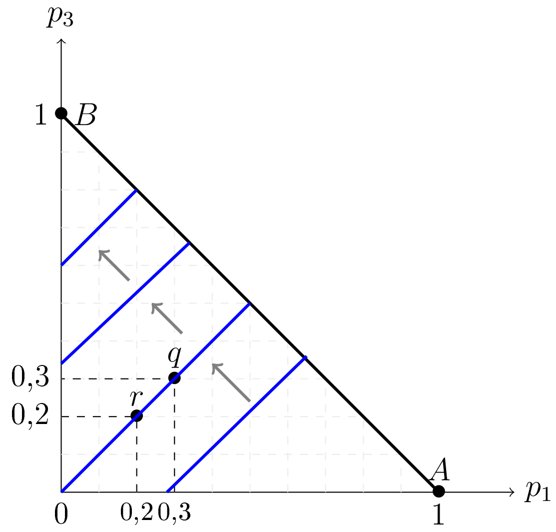
$$\begin{aligned}(V_q) &= q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 \\ \bar{u}_q &= q_1x_1 + (1 - q_1 - q_3)x_2 + q_3x_3 \\ \bar{u}_q &= q_1(x_1 - x_2) + x_2 + q_3(x_3 - x_2) \\ q_3 &= \frac{\bar{u}_q}{x_3 - x_2} + q_1\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

O mesmo pode ser expresso para a loteria r como:

$$r_3 = \frac{\bar{u}_r}{x_3 - x_2} + r_1\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}\right) \tag{13}$$

12 e 13 mostram as linhas de iso-valor esperado das loterias q e r, respectivamente, de modo que, quanto maior o valor de $\bar{u}_q$ e $\bar{u}_r$ mais acima e a esquerda estarão estas linhas. Este comportamento pode ser observado pelas linhas azuis na Figura 8. Note que as loterias r e q estão situadas sobre a mesma linha de iso-valor esperado, mas que, contudo, a loteria q está situada em um ponto acima da loteria r, o que de acordo com as equações 12 e 13 só é possível se $q_1 > r_1$ ou $q_3 > r_3$. Assim, dadas quaisquer loterias situadas sobre a mesma linha de iso-valor esperado, as loterias localizadas à nordeste da linha dominam estocasticamente em segunda ordem as loterias localizadas à sudoeste.

Figura 8: Dominância estocástica de segunda ordem no triângulo de Marschak.



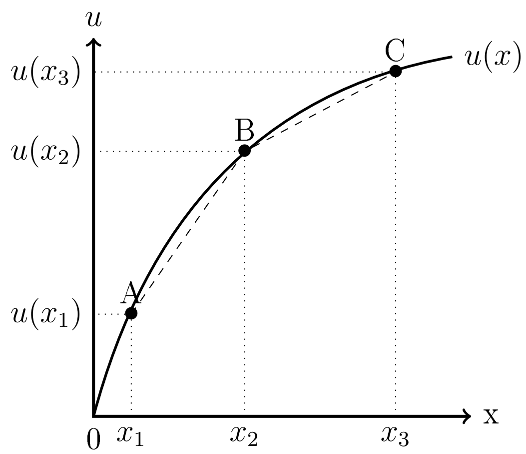
Como mencionado na Figura 4, a aversão ao risco está condicionada à concavidade da curva de indiferença por loterias. A aversão estrita ao risco, contudo, está condicionada à concavidade estrita da curva de indiferença por loterias. De maneira simplificada, a concavidade estrita conduz ao fato de que os ganhos utilidade são maiores quando as loterias possuem menores prêmios, ao passo que, os ganhos de utilidade decrescem a medida que os prêmios aumentam. Para representar esta condição, considere uma loteria composta por três prêmios $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, tal que $x_1 > x_2 > x_3$. A função de utilidade desta loteria é expressa na Figura 9.

Note que o decréscimo dos ganhos de utilidade com maiores prêmios só é possível se a inclinação do segmento AB for maior do que a inclinação do segmento BC, isto é, $u(x)$ só será estritamente côncava caso ocorra:

$$\begin{aligned} \frac{u(x_2) - u(x-1)}{x_2 - x_1} &> \frac{u(x_3) - u(x_2)}{x_3 - x_2} \\ \frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)} &> \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \end{aligned} \tag{14}$$

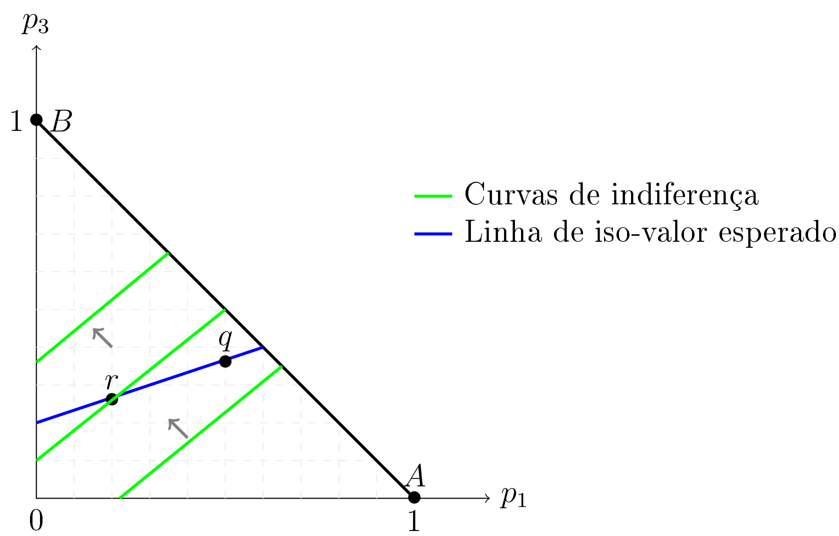
Note que o termo do lado esquerdo da Equação 14 é a inclinação da curva de indiferença por loterias expressa na Equação 3. Note também que o termo do lado direito da Equação 14 reflete a inclinação da reta de iso-valor esperado expressa na Equação 13. Assim, quando uma loteria r domina estocasticamente em segunda ordem uma loteria q, então um consumidor com aversão estrita ao risco prefere r a q se e somente se a sua curva de indiferença por loterias for menor do que a inclinação da reta de iso-valor esperado da loteria.

Figura 9: Utilidade vNM estritamente côncava.



Esta condição é facilmente visualizada na Figura 10. Note que a loteria q domina estocasticamente em segunda ordem a loteria r. Contudo, note também que devido à inclinação da curva de indiferença ser superior à inclinação da linha de iso-valor esperado, a loteria r está localizada em uma curva de indiferença acima e à direita da curva de indiferença em que a loteria q está situada. Em vista deste detalhe, o consumidor averso ao risco prefere a loteria r à loteria q, uma vez que r lhe trará maior utilidade do que q, apesar de ambas as loterias retornarem o mesmo valor esperado.

Figura 10: Aversão estrita ao risco e dominância estocástica de segunda ordem no triângulo de Marschak.



2.5 Eficiência de pareto

Para verificar se as escolhas envolvendo loterias são pareto-eficientes, considere o caso de uma economia simplificada com dois consumidores, a e b, onde há um único bem x que pode assumir dois possíveis estados, o estado alto x_H e o estado baixo x_L. Considere que o estado alto ocorre com uma probabilidade p, enquanto o estado baixo ocorre com uma probabilidade complementar $1 - p$. Neste caso, qualquer escolha entre os dois estados é uma loteria (x_H^a, x_L^a) ou (x_H^a, x_L^a) com probabilidades p e $1 - p$. Considere que os consumidores a e b possuem dotações iniciais de cada possível estado, sendo ω_H^a e ω_L^a, respectivamente, as dotações para os estados alto e baixo do consumidor a e ω^b_H e ω^b_L, respectivamente, as dotações para os estados alto e baixo do consumidor b.

A Figura 11 apresenta o diagrama de escolhas do consumidor a, onde os eixos horizontal e vertical mostram, respectivamente, o montante do bem x no estado e baixo. O segmento C_a é conhecido como ***linha de certeza*** e possui uma inclinação de 45^o, refletindo o fato de que cada ponto sobre a linha ocorre onde $x^a_H = x^a_L$. Para exemplificar, suponha que a dotação inicial do consumidor a seja de $(x^a_H, x^a_L) = (676, 196)$. Note que a dotação inicial está abaixo da linha de certeza, o que indica que inicialmente a está mais satisfeito com o estado alto do que com o estado baixo de x.

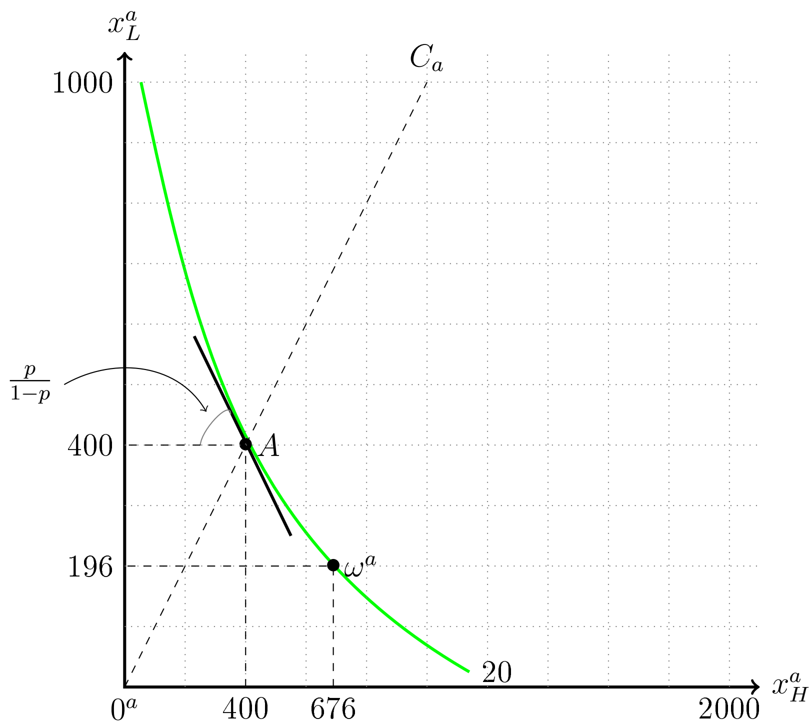
A linha verde expressa a curva de indiferença da utilidade esperada do consumidor a. Suponha que a utilidade esperada para este consumidor assume a seguinte forma funcional:

$$V^a(x^a_H, x^a_L) = p\sqrt{x^a_H} + (1-p)\sqrt{x^a_L} \tag{15}$$

Neste caso, a utilidade esperada para a dotação inicial do consumidor a é:

$$p\sqrt{676} + (1-p)\sqrt{196} = p(26) + (1-p)(14) = 12p + 14 \tag{16}$$

Figura 11: Escolhas do consumidor a por cada estado de x.



A curva de indiferença da utilidade esperada expressa na linha verde reflete o caso em que cada possível estado de x é igualmente provável, isto é, $p = 0,5$ o que implica em uma utilidade esperada de $UE = 20$ para qualquer combinação de estados situada sobre a curva. Para o consumidor a, a taxa marginal de substituição entre os estados alto e baixo $TMS_{H,L}$é:

$$\begin{aligned} TMS^a_{H,L} &= \frac{\partial UE}{\partial x^a_H} \Bigg/ \frac{\partial UE}{\partial x^a_L} \\ TMS^a_{H,L} &= \frac{pUMG^a_H}{(1-p)UMG^a_L} \\ TMS^a_{H,L} &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{UMG^a_H}{UMG^a_L}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Em que UMG é a utilidade marginal do prêmio. Ao longo da curva de certeza onde $p = 1-p$ a TMS é equivalente à razão entre as utilidades marginais. Na Figura 11, o ponto $A = (400, 400)$ é conhecido como o ***ponto de certeza equivalente*** da loteria ω^a e mostra a combinação de estados de x que possui a mesma utilidade esperada de ω^a, mas que porém, está situado sobre a linha de certeza, sendo, portanto, livre de qualquer risco.

Suponha agora que o consumidor b possua uma dotação inicial $\omega_b = (1324, 604)$. Neste caso, a disponibilidade de estados na economia é de $\omega^a + \omega_b = (2000, 800)$ e existe a possibilidade de compartilhamento de risco entre os consumidores, que pode ser expressa sob duas possibilidades, (i) quando a é averso ao risco e b é neutro ao risco; e (ii), quando ambos são aversos ao risco.

2.5.1 Caso I: um consumidor averso ao risco e um consumidor neutro ao risco

A Figura 12 mostra a caixa de Edegeworth para o caso em que o consumidor a é averso ao risco com uma função de utilidade vNM $u^a(x^a) = \sqrt{x^a}$ e o consumidor b é neutro ao risco com uma função de utilidade vNM $u^b(x^b) = x^b$. A utilidade esperada dos consumidores a e b é:

$$\begin{aligned} V^a\left(x_H^a, x_L^a\right) &= p\sqrt{x_H^a} + (1-p)\sqrt{x_L^a} \\ V^b\left(x_H^b, x_L^b\right) &= p x_H^b + (1-p) x_L^b \end{aligned} \tag{18}$$

Note que de acordo com a Equação 17, a TMS para o consumidor a é:

$$\begin{aligned} TMS^a &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_H^a}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{2\sqrt{x_L^a}}\right) \\ TMS^a &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_H^a}}\right) 2\sqrt{x_L^a} \\ TMS^a &= \left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\frac{x_L^a}{x_H^a}} \end{aligned} \tag{19}$$

Enquanto a TMS para o consumidor b é:

$$TMS^b = \left(\frac{p}{1-p}\right) \tag{20}$$

A curva de contrato descreve as combinações de loterias que são pareto-eficientes, isto é, reflete as loterias situadas em um ponto em que todos os arranjos mutualmente benéficos já se esgotaram. Estas loterias estão localizadas na caixa de Edgeworth nos pontos em que as TMS de ambos os consumidores são iguais, isto é:

$$\begin{aligned} & TMS^a = TMS^b \\ & \left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\frac{x_L^a}{x_H^a}} = \frac{p}{1-p} \\ & \sqrt{\frac{x_L^a}{x_H^a}} = 1 \\ & \sqrt{x_H^a} = \sqrt{x_L^a} \\ & x_H^a = x_L^a \end{aligned} \tag{21}$$

O que indica que neste caso em específico, a curva de contrato de loterias coincide com a linha de certeza do consumidor a, a qual é representada pelo segmento C^a. Neste caso, para qualquer alocação pareto-eficiente, o consumidor a estará totalmente protegido contra o risco da mudança de estado[1].

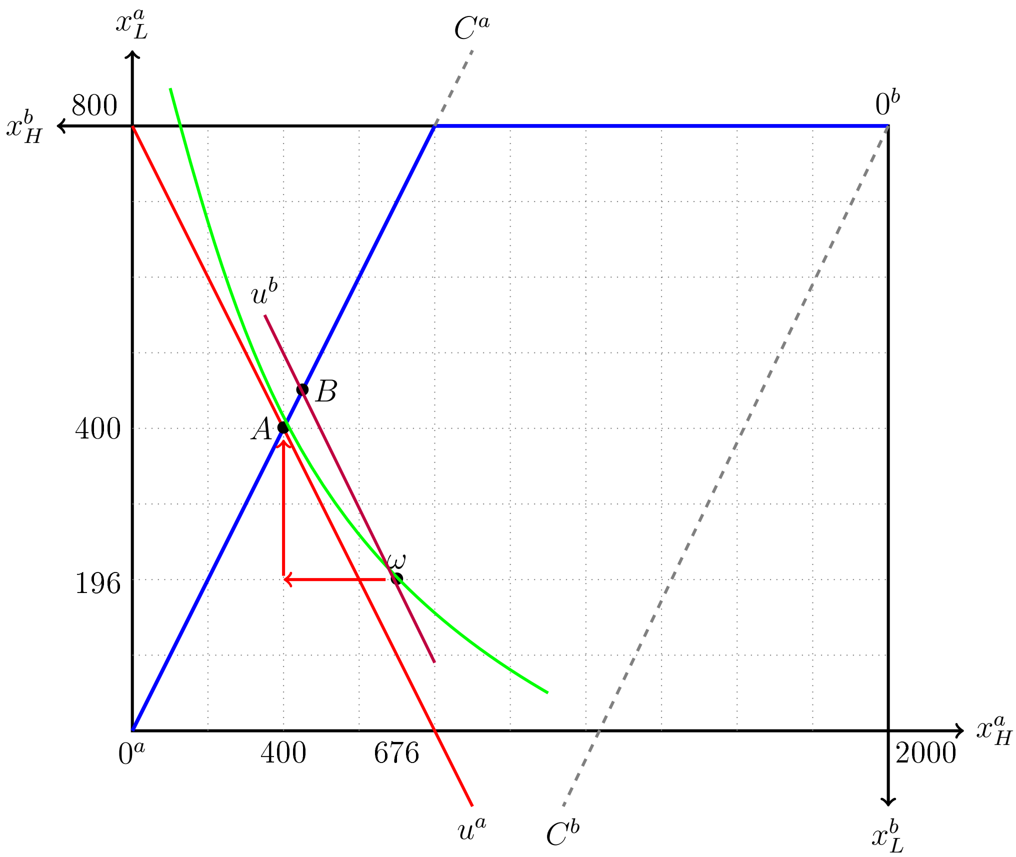
[1]Não é regra. Este caso ocorre apenas para este exemplo em específico.

Considere agora o ponto A, que representa uma alocação pareto-eficiente. Note que neste ponto o consumidor a está tão satisfeito quanto na dotação inicial do sistema, uma vez que A e ω estão situados sob a mesma curva de indiferença. No entanto, do ponto de vista do consumidor b houve um ganho de utilidade, uma vez que a loteria situada em A está localizada em uma curva de indiferença mais elevada. Como neste ponto o consumidor a recebe a mesma quantidade de cada estado, ele está totalmente protegido contra o risco, enquanto o consumidor b suporta todo o risco do sistema, uma vez que apesar de ele estar melhor em A do que em ω, a alocação A está totalmente fora da sua linha de certeza, indicada por C^b.

Considere agora o ponto B, onde o consumidor b está tão bem quanto na dotação inicial mas o consumidor a está em situação melhor do que na loteria ω. Neste caso, ainda existem trocas de estado que são mutualmente benéficas em relação à alocação inicial as quais dizem respeito a quaisquer alocações entre os pontos A e B ao longo da linha de certeza do consumidor A. Novamente, estas alocações não trazem nenhum risco ao consumidor A, o qual possui aversão ao risco.

Em resumo, quando existe um consumidor averso ao risco e um consumidor neutro ao risco, aquele que apresenta aversão ao risco estará completamente livre do risco, enquanto o consumidor neutro ao risco partilhará todo o risco do sistema.

Figura 12: Aversão ao risco para o consumidor a.



2.6 Dois consumidores aversos ao risco

Considere a mesma economia simplificada proposta na Subsubseção 2.5.1, supondo, entretanto, que tanto o consumidor a quanto o consumidor b são aversos ao risco. Neste caso, ambos os consumidores precisam ter funções de utilidade estritamente convexas. Assim, suponha que as funções de utilidade dos consumidores a e b por loterias são, respectivamente, $u^a(x^a) = \sqrt{x^a}$ e $u^b(x^b) = \sqrt{x^b}$. Neste caso, a TMS de a se mantém inalterada, enquanto a TMS de b passa a ser dada por:

$$
\begin{aligned}
TMS^b &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_H^b}}\right) \Bigg/ \left(\frac{1}{2\sqrt{x_L^b}}\right) \\
TMS^b &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_H^b}}\right) 2\sqrt{x_L^b} \\
TMS^b &= \left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\frac{x_L^b}{x_H^b}}
\end{aligned} \tag{22}
$$

A curva de contrato para o caso em que ambos os consumidores são aversos ao risco é:

$$
\begin{aligned}
&TMS^a = TMS^b \\
&\left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\frac{x_L^a}{x_H^a}} = \left(\frac{p}{1-p}\right)\sqrt{\frac{x_L^b}{x_H^b}} \\
&\sqrt{\frac{x_L^a}{x_H^a}} = \sqrt{\frac{x_L^b}{x_H^b}} \\
&\frac{x_L^a}{x_H^a} = \frac{x_L^b}{x_H^b} \\
&x_L^a = \frac{x_H^a x_L^b}{x_H^b}
\end{aligned} \tag{23}
$$

Pela condição de factibilidade, sabe-se que a disponibilidade de bens é dada pela soma do consumo dos dois agentes e a dotação inicial, portanto:

$$
\begin{aligned}
x_H^a + x_H^b &= \omega_H^a + \omega_H^b \\
x_H^b &= \omega_H^a + \omega_H^b - x_H^a
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
x_L^a + x_L^b &= \omega_L^a + \omega_L^b \\
x_L^b &= \omega_L^a + \omega_L^b - x_L^a
\end{aligned} \tag{25}
$$

Substituindo 24 e 25 na Equação 23, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&x_L^a = \frac{x_H^a(\omega_L^a + \omega_L^b - x_L^a)}{\omega_H^a + \omega_H^b - x_H^a} \\
&x_L^a(\omega_H^a + \omega_H^b - x_H^a) = x_H^a(\omega_L^a + \omega_L^b - x_L^a) \\
&x_L^a(\omega_H^a + \omega_H^b - x_H^a + x_H^a) = x_H^a(\omega_L^a + \omega_L^b) \\
&x_L^a(\omega_H^a + \omega_H^b) = x_H^a(\omega_L^a + \omega_L^b) \\
&x_L^a = x_H^a\left(\frac{\omega_L^a + \omega_L^b}{\omega_H^a + \omega_H^b}\right)
\end{aligned} \tag{26}
$$

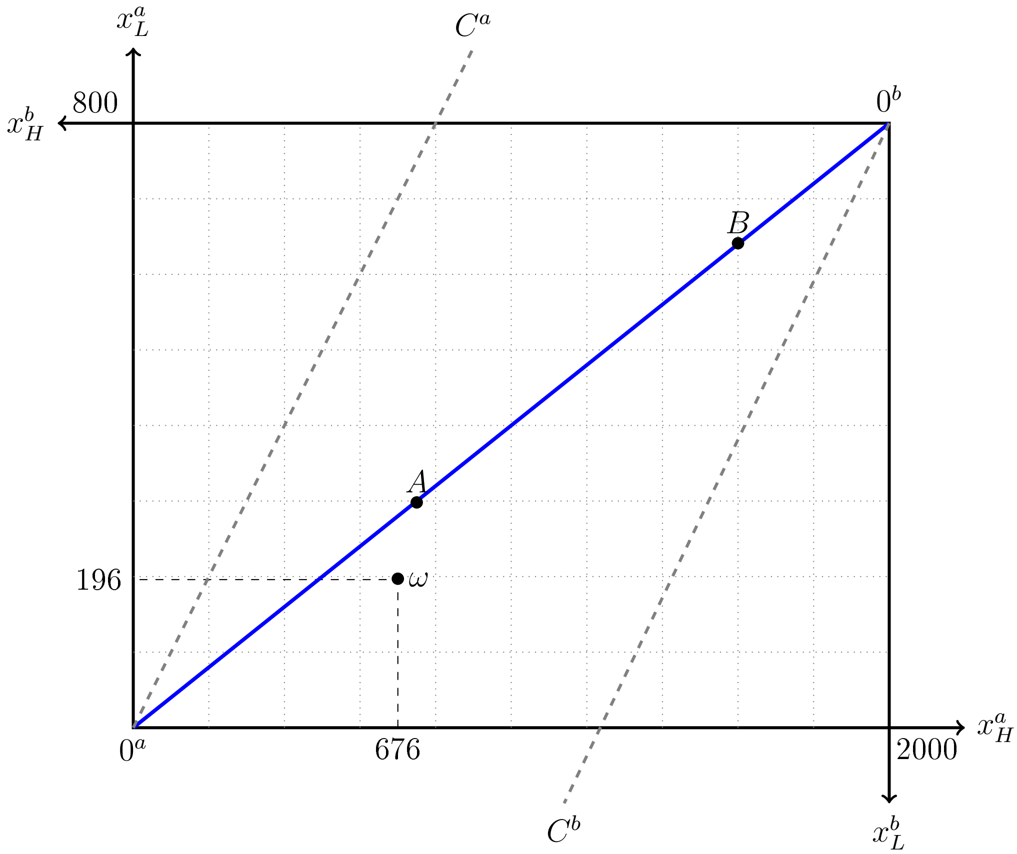
Dado que neste exemplo em específico $\omega^a = (676, 196)$ e $\omega^b = (1324, 604)$, então:

$$
\begin{aligned}
x_L^a &= x_H^a\left(\frac{196 + 604}{676 + 1324}\right) \\
x_L^a &= \left(\frac{2}{5}\right) x_H^a
\end{aligned} \tag{27}
$$

A Equação 27 é a curva de contrato para o caso especificado nesta subseção e está representada pelo segmento $0^a 0^b$ na Figura 13. Note que agora a curva de contrato não coincide com a linha de certeza de nenhum dos dois consumidores, de tal modo que as alocações pareto-eficientes de estados não conduzem a uma total segurança contra o risco. Assim, conclui-se que *quando ambos os consumidores são aversos ao risco, há um compartilhamento do risco que será tão grande quanto maior for a distância entre as alocações na curva de contrato e as linhas de certeza.*

Por exemplo, na alocação A o consumidor b detém uma maior parcela do risco enquanto o consumidor a está menos exposto ao risco, uma vez que a alocação está mais próxima da linha de certeza de a do que da linha de certeza de b. Em contrapartida, na alocação B o consumidor b está menos exposto ao risco, uma vez que a alocação está mais próxima da linha de certeza de b do que da linha de certeza de a. Assim, a fração do risco para cada consumidor pode ser medida pela divisão da menor distância entre a alocação e a reta de certeza do consumidor específico e a menor distância entre a alocação e a reta de certeza do outro consumidor.

Figura 13: Dois consumidores aversos ao risco.



2.7 Mensurando a aversão ao risco

Uma das principais maneiras de calcular a aversão ao risco de um consumidor é por meio da ***mensuração de Arrow-Pratt*** para a aversão ao risco, a qual consiste em uma medida absoluta ou relativa simplificada do grau de aversão ao risco.

• **Definição 1:** *Mensuração de Arrow-Pratt*
Deixe u ser uma função de utilidade vNM por loterias duplamente diferenciável. A mensuração de Arrow-Pratt para a aversão absoluta ao risco (ARA) é denotada por:

$$ARA(u(x)) = \frac{-\partial^2 u(x)/\partial x}{\partial u(x)/\partial x} \tag{28}$$

Já a mensuração de Arrow-Pratt para a aversão relativa ao risco (RRA) é denotada por:

$$RRA(u(x)) = -x\left(\frac{\partial^2 u(x)/\partial x}{\partial u(x)/\partial x}\right) \tag{29}$$

A mensuração de Arrow-Pratt tem uma interpretação semelhante a uma elasticidade. No caso de aversão ao risco, se x aumenta em 1%, então a utilidade vNM marginal cai em RRA%. Em outras palavras, quanto mais côncava for $u(x)$, mais averso ao risco será o consumidor.