Revisão de Derivadas

Helson Gomes de Souza

Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências Sociais Aplicadas

Outubro de 2022

Objetivos

Objetivo geral

- Entender o conceito de derivada bem como as principais regras de derivação e as suas possibilidades de utilização.

Objetivos específicos

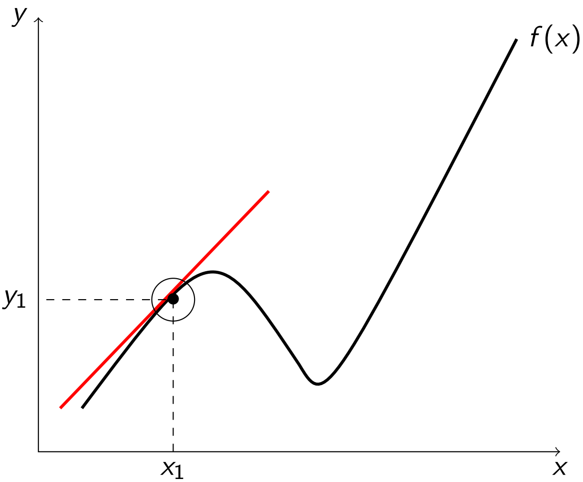
- Conhecer o conceito matemático da derivada.
- Entender as principais regras de derivação.
- Conhecer as regras de derivação em funções trigonométricas.
- Aprender a identificar extremos relativos de uma função por meio da derivada.

Conceito

O conceito de derivada

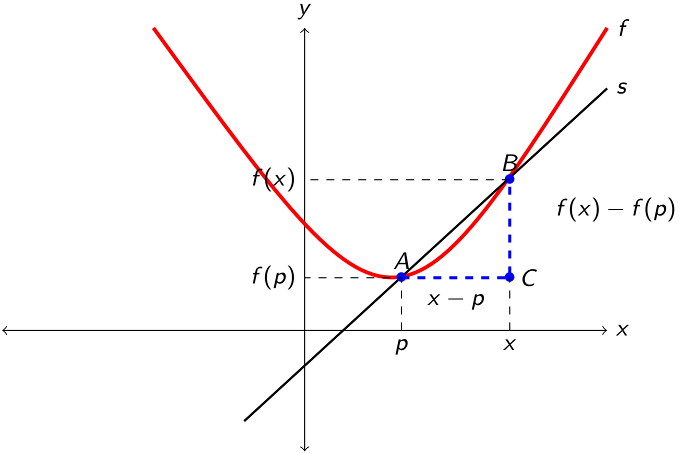
A derivada é um mecanismo matemático que permite encontrar a inclinação de uma reta tangente à curva de uma função em um determinado ponto do seu domínio.

- **Para que?** A inclinação da reta tangente à curva de uma função em um dado ponto do seu domínio permite concluir o sentido das mudanças na imagem da função caso ocorram modificações no domínio em um ponto próximo ao ponto de tangência.


y
$f(x)$
y_1
x_1
x

Definição

- Seja f uma função e p um ponto no domínio de f, o cálculo da derivada visa encontrar o coeficiente angular da reta tangente à curva de f no ponto $(p, f(p))$.
- Para demonstrar, considere a figura a seguir. Suponha que queiramos encontrar o coeficiente angular da reta s no ponto em que f e s são tangentes.



Definição

- Considere o triângulo A,B,C. O segmento A-C é equivalente a $x - p$, enquanto o segmento C-B corresponde a $f(x) - f(p)$. Como queremos encontrar a inclinação em A, então deveremos fazer uso do cálculo da tangência que equivale a razão entre os catetos opostos e adjacentes ao ângulo em questão.

$$Tg(p, f(p)) = \frac{C:B}{A:C} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{1}$$

- No entanto, note que a reta s cruza a curva da função em dois pontos e não unicamente em um ponto como presupõe-se para a tangente.
- Para contornar esse questionamento e concluir o raciocínio a respeito da derivada, considere o caso em que p está variando e se aproximando do ponto x. Nesse caso, diz-se que x está tendendo a p e atingirá um valor extremamente próximo de p o qual é denominado de limite de $f(x)$ quando x tende a p. A equação anterior passa a ser escrita como:

Definição

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \tag{2}$$

- A derivada também pode ser encontrada por meio da utilização do seguinte teorema a respeito dos limites:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \tag{3}$$

- Neste sentido, o cálculo da derivada pode ser obtido a partir de:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ ou } f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \tag{4}$$

Definição

Seja f uma função e p um valor em D_f, a derivada de f no ponto $(p, f(p))$ é dada por $f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$.

Exemplo

- Para ilustrar, considere a função $f(p) = 2$, representada na Figura **??**: Evidentemente, uma reta que tangencia a curva dessa função em qualquer ponto não possui nenhuma inclinação, uma vez que a sua representação gráfica seria perfeitamente inelástica ao eixo x. Provaremos isso por meio da derivada utilizando a Equação (4).
- Definiremos o ponto p $= 4$ para encontrar a derivada da função $f(p)$ nesse ponto. Se $f(p) = 2$ e $p = 4$, então:
  $\Rightarrow f(p+h) = 2$
  $\Rightarrow f(p) = 2$
- Então:

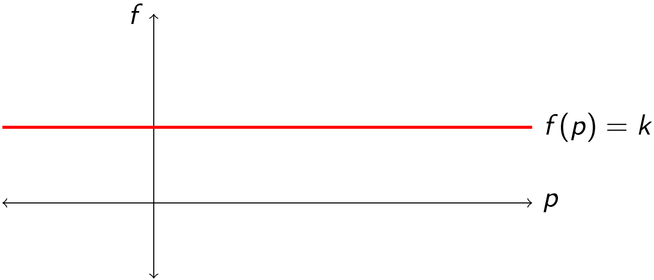
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{2} = 0$$

- O resultado impõe uma regra básica no uso das derivadas, a qual indica que toda função constante possui derivada igual a zero.

Derivada de uma função constante

- Genericamente, considere a função constante $f(p) = k$, com k correspondendo a um número qualquer. Dado que $f(x) = k \; \forall \; x$ então $f(x+h) = k \; \forall \; x$, em um determinado ponto p, a inclinação da reta tangente à curva dessa função será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 \tag{5}$$



- Sejam $f(x) = ax + b$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- **Resposta:** Tem-se $f(x+h) = a(x+h) + b$ e $f(x) = ax + b$. Como $y'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f(x)) &= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} \\
&= \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} \\
&= \frac{ah}{h} \\
&= a
\end{aligned} \tag{6}$$

- Seja $f(x) = ax^n$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- **Resposta:** Tem-se que:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= a(x+h)^n \\
&= a\left[(x+h)(x+h)(x+h)...(x+h)\right] \quad \text{O que corresponde a} \\
&= a\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right]
\end{aligned} \tag{7}$$

- De acordo com o conceito de derivada, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(ax^n\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{a\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - ax^n}{h} \\
&= \frac{a\left[nx^{n-1}h + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right]}{h} \\
&= anx^{n-1}
\end{aligned}$$

- Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções de valor real, qual a derivada de $y(x) = f(x) + g(x)$?
- **Resposta:** Tem-se $y(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$ e $y(x) = f(x) + g(x)$. Como $y'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned} \tag{8}$$

- Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções de valor real, qual a derivada de $y(x) = f(x) * g(x)$?
- **Resposta:** Tem-se $y(x+h) = f(x+h) * g(x+h)$ e $y(x) = f(x) * g(x)$. Como $y'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$, então:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&\text{Adicionando e subtraindo } \frac{f(x+h)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[g(x) \underbrace{\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)}_{f'(x)} \right] + \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{f(x+h)}_{f(x) \text{ pois } h \to 0} \left(\underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} \right) \right] \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f(x)
\end{aligned} \tag{9}
$$

- Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções de valor real, qual a derivada de $y(x) = f(x)/g(x)$?
- **Resposta:** Tem-se $y(x+h) = f(x+h)/g(x+h)$ e $y(x) = f(x)/g(x)$. Como $y'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, então:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)}{h(g(x)+h)} - \frac{f(x)}{hg(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \text{Adicionando e subtraindo } \frac{f(x)g(x)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x+h)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{hg(x)g(x+h)}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}-\frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}}{g(x)g(x+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\left[\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}\right]}{g(x)\underbrace{g(x+h)}_{g(x)\text{ pois } h\to 0}} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\left[\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\right]}{g(x)\underbrace{g(x+h)}_{g(x)\text{ pois } h\to 0}} \\
&= \frac{g(x)f'(x)}{g(x)g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g(x)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Regras de derivação

Regra da cadeia

- Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções de valor real, qual a derivada de $y(x) = f(g(x))$?
- **Resposta:** Tem-se $y(x) = f(g(x))$ e $y(p) = f(g(p))$. Como $y'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, então:

$$
\begin{aligned}
y'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x - p} \\
&\quad \text{Multiplicando e dividindo por } g(x) - g(p) \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(g(x)) - f(g(p))}{x - p} \left[\frac{g(x) - g(p)}{g(x) - g(p)} \right] \\
&= \underbrace{\lim_{x \to p} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(p))}{g(x) - g(p)} \right]}_{f'(g(x))} \underbrace{\lim_{x \to p} \left[\frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right]}_{f'(x)} \\
&= f'(g(x)) g'(x)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

- Suponha que uma firma produz um produto Y substituindo captal (K) por trabalho (L) de acordo com uma função de Elasticidade de Substituição Constante (CES). Qual a produtividade marginal do capital?
- Tem-se: $f'(g(K)) = A\left[\delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}$
- $g(K) = \delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho}$ e $g'(K) = \rho\delta K^{\rho-1}$.

$$
\begin{aligned}
PMG_K = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial K} &= \left(\frac{1}{\rho}A\left[\delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1}\right)\rho\delta K^{\rho-1} \\
&= A\left[\delta K^{\rho} + (1-\delta)L^{\rho}\right]^{\frac{1-\rho}{\rho}}\left(\rho\delta K^{\rho-1}\right)
\end{aligned}
$$

Derivadas de funções trigonométricas

Função seno

- Seja $f(x) = sen(x)$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- Tem-se $f(x+h) = sen(x+h)$ e $f(x) = sen(x)$.

$$\frac{dsen(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

Dado que $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$ então

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h) + cos(x)sen(h) - sen(x)}{h} \tag{13}$$

$$= \lim_{h\to 0} cos(x) \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{1 \text{ pelo TLF}} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)\left[cos(h) - 1\right]}{h}$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo por$cos(h) + 1$

$$\frac{dsen(x)}{dx} = cos(x) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(x)\,[cos(h)-1]}{h}\right)\left(\frac{cos(h)+1}{cos(h)+1}\right)$$

$$= cos(x) + \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\left[cos^2(h)+cos(h)-cos(h)-1\right]}{h\,[cos(h)+1]}$$

$$= cos(x) + \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\left[cos^2(h)-1\right]}{h\,[cos(h)+1]}$$

Sabe-se que $sen^2(a)+cos^2(a)=1$ o que implica em $cos^2(h)-1=-sen^2(h)$

$$= cos(x) + \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\,[-sen(h)sen(h)]}{h\,[cos(h)+1]}$$

$$= cos(x) + \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\,[-sen(h)]}{cos(h)+1}\underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\text{1 pelo TFL}}$$ como $sen(0)=0$ e $cos(0)=1$

$$= cos(x) + \frac{sen(x)*0}{1+1}$$

$$= cos(x)$$

- Seja $f(x) = cos(x)$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- Tem-se $f(x+h) = cos(x+h)$ e $f(x) = cos(x)$.

$$\frac{dcos(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h}$$

sabe-se que $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)cos(h) - sen(x)sen(h) - cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)cos(h) - cos(x)}{h} - \lim_{h\to 0} sen(x) \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\text{1 pelo TFL}}$$

multiplicando e dividindo o primeiro termo por $cos(h) + 1$

$$= -sen(x) + \lim_{h\to 0} \left[\frac{cos(x)[cos(h) - 1]}{h}\right] \left[\frac{cos(h) + 1}{cos(h) + 1}\right]$$

$$= -sen(x) + \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)[cos^2(h) + cos(h) - cos(h) - 1]}{h[cos(h) + 1]}$$

$$\frac{dcos(x)}{dx} = -sen(x) + \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)[cos^2(h) - 1]}{h[cos(h) + 1]}$$

Sabe-se que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ então $cos^2(h) - 1 = -sen^2(h)$

$$= -sen(x) + \lim_{h \to 0} \frac{cos(x) - sen^2(h)}{h[cos(h) + 1]}$$

$$= -sen(x) + \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)sen(h)}{[cos(h) + 1]} \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\text{1 pelo TLF}}$$

como $sen(0) = 0$ e $cos(0) = 1$

$$= -sen(x) + \frac{1 * 0}{1 + 1}$$

$$= -sen(x)$$

- Seja $f(x) = tg(x)$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- Tem-se: $f(x+h) = tg(x+h)$ e $f(x) = tg(x)$.

$$\frac{dtg(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{tg(x+h) + tg(x)}{h} \quad \text{como } tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sen(x+h)}{cos(x+h)} - \frac{sen(x)}{cos(x)}}{h}$$

Dado que $sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$

e sabendo que $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$ então

$$\frac{dtg(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sen(x)cos(h)+sen(h)cos(x)}{cos(x)cos(h)-sen(x)sen(h)} - \frac{sen(x)}{cos(x)}}{h}$$

- O próximo passo é aplicar o MMC no numerador da equação anterior.

$$\frac{dtg(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{cos(x)sen(x)cos(h) - sen(h)cos^2(x) - sen(x)cos(x)cos(h) + sen^2(x)cos(h)}{cos(x)[cos(x)cos(h) - sen(x)sen(h)]}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(h)[cos^2(x) + sen^2(x)]}{hcos(x)[cos(x)cos(h) - sen(x)sen(h)]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\text{1 pelo TFL}} \frac{[cos^2(x) + sen^2(x)]}{cos(x)[cos(x)cos(h) - sen(x)sen(h)]}$$

Dado que $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$, então

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{cos^2(x)cos(h) - cos(x)sen(x)sen(h)}$$

como $cos(0) = 1$ e $sen(0) = 0$

$$= \frac{1}{cos^2(x)} \quad \text{como } sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \text{ então } \frac{dtg(x)}{dx} = sec^2(x)$$

- Seja $f(x) = sec(x)$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$?
- Sabe-se que $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$, portanto, tem-se $f(x) = \frac{1}{cos(x)}$ e $f(x+h) = \frac{1}{cos(x+h)}$.

$$\frac{dsec(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{cos(x+h)} - \frac{1}{cos(x)}}{h} \quad \text{Aplicando o MMC}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x) - cos(x+h)}{hcos(x)cos(x+h)}$$

$$\text{como } cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x) - cos(x)cos(h) + sen(x)sen(h)}{hcos(x)cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x)[1 - cos(h)]}{hcos(x)cos(x+h)} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)}{cos(x)cos(x+h)} \underbrace{\frac{sen(h)}{h}}_{\text{1 pelo TFL}}$$

$$\frac{dsec(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{1-cos(h)}{hcos(x+h)} + \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)}{cos(x)cos(x+h)} \quad \text{como } \cos(0)=1$$

$$= 0 + \frac{sen(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{cos(x)}}_{sec(x)}\underbrace{\frac{sen(x)}{cos(x)}}_{tg(x)}$$

$$= sec(x)tg(x)$$

- Considere uma função do tipo $f(x) = \cot x$. Como encontrar a derivada dessa função em um determinado ponto x? A resposta é demonstrada a seguir:
- Primeiro, ressalta-se que:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \Rightarrow \quad \cot x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \quad \Rightarrow \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Agora considere esses conceitos na aplicação da regra básica e definae $y = \frac{g(x)}{h(x)}$, $g(x) = \cos x$ e $h(x) = senx$.
- Utilizando a regra do quociente, tem-se:

Derivadas de funções trigonométricas
Função cotangente

$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = \frac{g'(x)\times h(x) - g(x)\times h'(x)}{(h(x))^2}$$
$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = \frac{-sen(x)\times sen(x) - (\cos x \times \cos x)}{(sen(x))^2}$$
$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = \frac{-sen^2(x) - \cos^2(x)}{(sen(x))^2}$$
$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = \frac{-\left(sen^2(x) + cos^2(x)\right)}{sen^2(x)}$$
como $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$
$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}(cot(x)) = -\csc^2 x$$

- Considere uma função do tipo $f(x) = \csc x$. Como encontrar a derivada dessa função em um determinado ponto x? Para derivar esse tipo de função você pode proceder de duas formas:
- Dado que $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ e que $\frac{d}{dx}(senx) = \cos x$, é possível utilizar a regra do quociente para encontrar $\frac{d}{dx} \csc x$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\csc(x) &= \frac{0 * sen(x) - cos(x)}{sen^2(x)} \\
&= \frac{-cos(x)}{sen^2(x)} \quad \text{como } \frac{cos(x)}{sen(x)} = cot(x) \quad \text{e } \frac{1}{sen(x)} = csc(x) \\
&= -cot(x)\frac{1}{sen(x)} \\
&= -cot(x)csc(x)
\end{aligned}
$$

Derivada de uma função logarítmica

- Considere uma função do tipo $f(x) = ln(x)$. Como encontrar a derivada dessa função em um determinado ponto x?
- Dado que $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ou $e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$, então.

$$\frac{d}{dx}ln(x) = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Fazendo $\frac{h}{x} = t$, então $h = tx$ de modo que se $h \to 0$ então $t \to$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{tx}ln\left(1+t\right) \quad \text{Dado que } nlog(A) = log(A)^n$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

Derivada de uma função logarítmica

- Visto que $e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$, então:

$$\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}ln(e) \quad \text{Como } ln(e) = 1$$

$$\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}$$

observe que se $g(x) = ln()$ e $f(x) = x$, então $\frac{1}{x} = \frac{f\prime x}{x}$

então

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{f\prime x}{f(x)}$$

Derivada de uma função exponencial

- Seja $f(x) = e^x$ uma função de valor real, qual a derivada de $f(x)$ no ponto $x = x$?
- Tem-se $f(x) = e^x$ e $f(x+h) = e^{x+h}$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\exp x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x) \cdot \exp(h) - \exp(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} \\
&= \exp(x) \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \right)}_{ln(e) \text{ pelo } 3^o \text{ TLF}}
\end{aligned}$$

Como $\ln(e) = 1$

$$= \exp(x)$$

Derivadas parciais

- Considere uma função de valor real com mais de um argumento, $y = f(x_1, x_2, x_n) = f(x_i)$ com $i = 1, 2, ..., n$.
- As derivadas parciais de f mostram a inclinação da reta tangente à curva da função em um dado ponto (x_i, y).
- A título de especificação, a derivada parcial de $f(x_i)$ em relação à x_1 avaliada no ponto $x_1 = p$ mostra a inclinação da reta tangente à curva da função $f(x_i)$ no ponto $y, x_1 = p$ e pode ser escrita como:

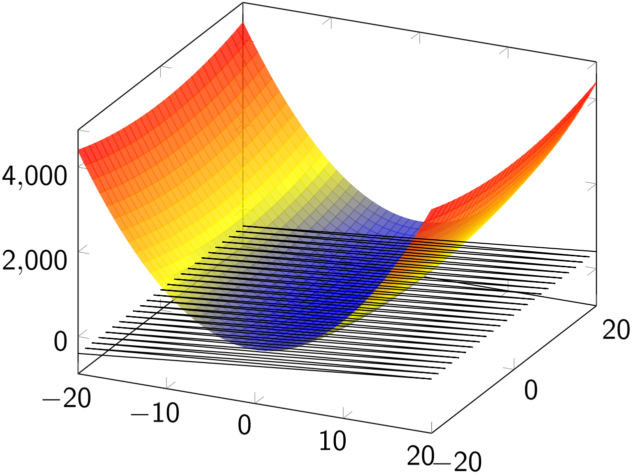
$$\left.\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, ..., x_n+h) - f(x_i)}{h}$$

com $x_i = x_1, x_2, ...x_n$ e $x_1 = p$

- Para demonstrar, suponha que queiramos encontrar a derivada da função $z = 10x^2 + y^2$ no ponto em que $x = 10$.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=10} &= \lim_{h\to 0} \frac{10(x+h)^2 + y^2 - 10x^2 - y^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10(x^2 + 2xh + h^2) - 10x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10h(2x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 20x + 10h \\
&= 20x \\
&= 20 * 10 = 200
\end{aligned}$$

Derivadas parciais



- Considere que existem $x_1, x_2, ..., x_n$ bens em uma economia e que a utilidade de um consumidor representativo pode ser representada de acordo com uma função de utilidade do tipo Stone-Geary, isto é:

$$U(x_i) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \gamma_i)_i^{\alpha}$$

- A utilidade marginal do bem x_1 é dada por:

$$\frac{\partial U(x_i)}{\partial x_1} = \alpha_1 (x_1 - \gamma_1)^{\alpha_1 - 1} \prod_{j=2}^{n} (x_j - \gamma_j)^{\alpha_j}$$

Derivadas de ordem superior

- Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. A derivada de f, a função f', será chamada de **derivada primeira** de f ou de **função derivada primeira** de f.
- Caso a função f' seja derivável, a derivada de f' será denotada por f'' e chamada de derivada segunda de f. Analogamente, se f'' for derivável, a derivada de f'' será denotada por f''' e chamada de **derivada terceira** de f.
- Para $n > 3$, a n-ésima derivada da função f, denotada por $f(n)$, é a derivada primeira da função $f(n-1)$ (derivada (n − 1)-ésima de f).

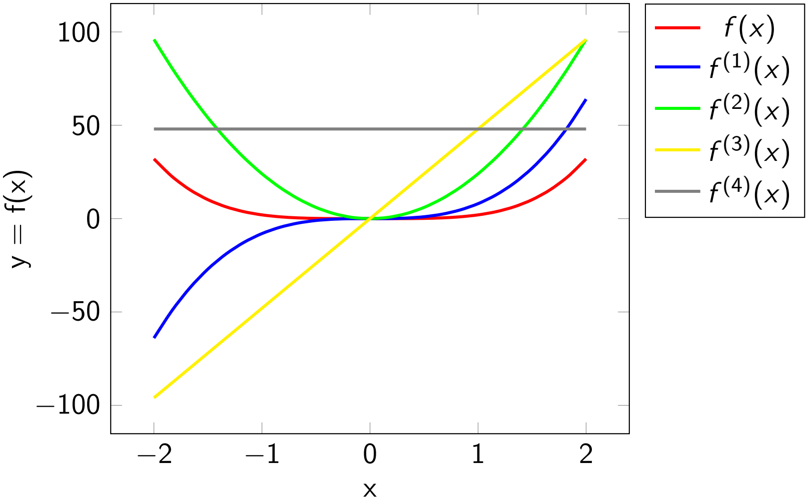
$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{\partial f^{(1)}(x)}{\partial x} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{\partial f^{(n-1)}(x)}{\partial x} \end{aligned} \tag{15}$$

- Considere a função $f(x) = 2x^4$.
- Usando a regra da potência, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 8x^3 \\
f^{(2)}(x) &= 24x^2 \\
f^{(3)}(x) &= 48x \\
f^{(4)}(x) &= 48
\end{aligned}
$$

Derivadas de ordem superior

Exemplo

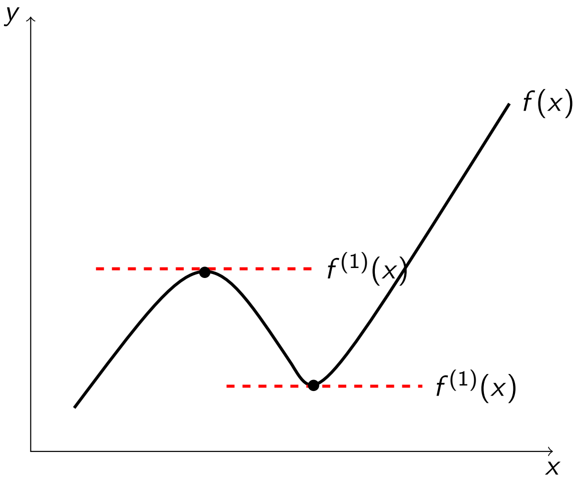


Extremos relativos a partir da derivada

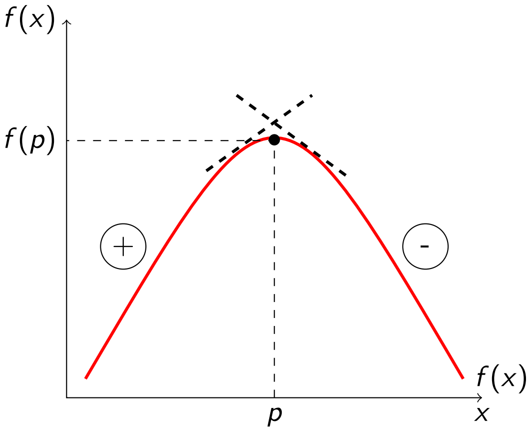
- Se a derivada mede a inclinação da reta tangente à curva da função em um dado ponto, então no ponto em que esta inclinação é nula, a função apresenta um extremo relativo.
- Este extremo pode ser um ponto de máximo ou de mínimo.
- Assim, a derivada nula é uma condição necessária para que uma função esteja sendo maximizada em um dado ponto.

Extremos relativos a partir da derivada

Funções de um único argumento



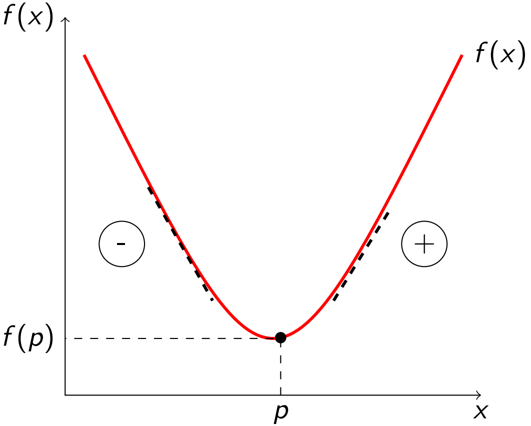
- Um dado ponto $p = (x, f(x))$ será um ponto de máximo relativo de $f(x)$ se $f'(x) = 0$ e se o sinal de $f'(x)$ é positivo à esquerda do ponto $p = (x, f(x))$ e negativo à direita do ponto $p = (x, f(x))$.



Extremos relativos a partir da derivada

Mínimos relativos: Funções de um único argumento

- Um dado ponto $p = (x, f(x))$ será um ponto de mínimo relativo de $f(x)$ se $f'(x) = 0$ e se o sinal de $f'(x)$ é negativo à esquerda do ponto $p = (x, f(x))$ e positivo à direita do ponto $p = (x, f(x))$.



- A condição necessária para que um determinado ponto $x = p$ seja um ponto de máximo (ou mínimo) de $f(x)$ estabelece que a derivada de $f(x)$ no ponto $x = p$ deve ser igual a zero, isto é:

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=p} = f'(p) = 0$$

- A condição suficiente para a existência de extremos relativos estabelece que:
- Se $\left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=p} = f''(p) < 0$ então p é um ponto de máximo de $f(x)$.
- Se $\left.\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right|_{x=p} = f''(p) > 0$ então p é um ponto de mínimo de $f(x)$.

Extremos relativos a partir da derivada

Funções de um único argumento

- Considere a função $f(x) = 2x^2 + 4x$. A condição necessária para a existência de extremos relativos estabelece que:

$$\frac{\partial f(x)}{x} = 4x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

- De acordo com a condição suficiente para a existência de extremos relativos:

$$\left.\frac{\partial^2 f(x)}{x^2}\right|_{x=1} = 4$$

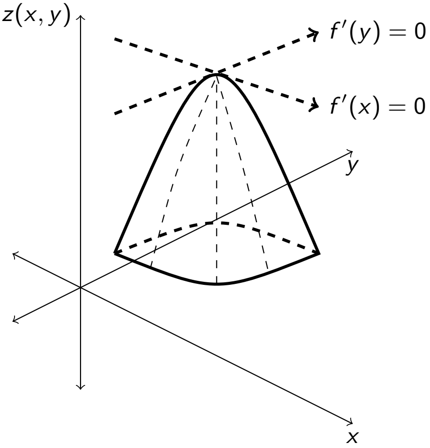
- Como $4 > 0$, então $x = 1$ é um ponto de mínimo relativo de $f(x) = 2x^2 + 4x$.

- Considere uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. A condição necessária para a existência de extremos relativos estabelece que todas as derivadas parciais de f devem ser iguais a zero, isto é:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 0 \\
f^{(2)}(x) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= 0 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Extremos relativos a partir da derivada

Funções com múltiplos argumentos



- A condição suficiente para a existência de extremos relativos em uma função de múltiplos argumentos depende da condição de convexidade da função no entorno do ponto crítico.
- Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma função de múltiplos argumentos definida em um conjunto convexo S, seja $p = (x_1^\star, x_2^\star, ..., x_n^\star)$ um ponto crítico de f em S, se f é côncava no entorno de p, então p é um ponto de máximo local de f em S.
- Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ uma função de múltiplos argumentos definida em um conjunto convexo S, seja $p = (x_1^\star, x_2^\star, ..., x_n^\star)$ um ponto crítico de f em S, se f é convexa no entorno de p, então p é um ponto de mínimo local de f em S.
- A condição de covexidade local de uma função com múltiplos argumentos pode ser verificada a partir dos sinais dos menores principais da matriz Hessiana de derivadas parciais de segunda ordem da função.

- Seja $D_{i,j}^{x^\star}$ a derivada parcial da i-ésima condição de primeira ordem em relação ao j-ésimo argumento da função, avaliadas no ponto $p = (x_1^\star, x_2^\star, ..., x_n^\star)$, a matriz Hessiana de derivadas parciais de segunda ordem, H, pode ser escrita como:

$$H = \begin{bmatrix} D_{1,1}^{x^\star} & D_{1,2}^{x^\star} & \dots & D_{1,n}^{x^\star} \\ D_{2,1}^{x^\star} & D_{2,2}^{x^\star} & \dots & D_{2,n}^{x^\star} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n,1}^{x^\star} & D_{n,2}^{x^\star} & \dots & D_{n,n}^{x^\star} \end{bmatrix} \tag{16}$$

- Seja D_H o determinante de H, se todos os menores principais de H são menores ou iguais a zero e se $D_H \geq 0$, então $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é côncava no entorno do ponto $p = (x_1^\star, x_2^\star, ..., x_n^\star)$ e p é um ponto de máximo local de f em S.
- Se todos os menores principais de H são não negativos e se $D_H \geq 0$, então $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é convexa no entorno de p e p é um ponto de mínimo local de f em S.
- Se nenhuma das duas condições anteriores é satisfeita, então p não é máximo nem mínimo local de f em S.

- Considere uma função com dois argumentos $f(x,y) = -2x^2 - 2xy + 36x + 42y - 158$. Existe um extremo relativo nesta função?
- Pela condição necessária para a existência de extremos relativos, tem-se:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -4x - 2y + 36 = 0$$
$$x = \frac{36 - 2y}{4} \tag{17}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x - 4y + 42 = 0$$
$$x = 21 - 2y \tag{18}$$

- Substituindo a Equação (17) na Equação (18):

$$
\begin{aligned}
21 - 2y &= \frac{36 - 2y}{4} \\
84 - 8y &= 36 - 2y \\
6y &= 48 \\
y &= 8
\end{aligned} \tag{19}
$$

- Substituindo na Equação (17):

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{36 - 2 * 8}{4} \\
x &= 5
\end{aligned} \tag{20}
$$

- Portanto, o ponto $(x, y) = (5, 8)$ é um candidato à extremo relativo da função em questão.
- O próximo passo é montar a matriz Hessiana de derivadas parciais de segunda ordem e checar a condição suficiente para a otimização.

- As condições de segunda ordem são:

$$
\begin{aligned}
D_{1,1}^{(x^\star,y^\star)} &= -4 \\
D_{1,2}^{(x^\star,y^\star)} &= -2 \\
D_{2,1}^{(x^\star,y^\star)} &= -2 \\
D_{2,2}^{(x^\star,y^\star)} &= -4
\end{aligned} \tag{21}
$$

- A matriz Hessiana de derivadas parciais de segunda ordem é:

$$
H = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \tag{22}
$$

- Seja H_i o i-ésimo menor principal de H com $i = 1, 2, ..., n$, tem-se que $H_1 = -4 \leq 0$ e $|H| = 12 \geq 0$, implicando no fato de que o ponto $(x, y) = (5, 8)$ é um ponto de máximo local da função em questão.

Referências

- CHIANG, A. C; WAINWRIGHT, K. **Matemática para economistas**. 8ª Triagem. Elsevier. 2006.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo, Vol 1**. 5ª edição. Editora LTC. 2013.
- LEITHOLD, L. **Cálculo com geometria analítica**. 3ª edição. Editora HARBRA. 1994.
- SIMON, C, P; BLUME, L; DOERING, C. I. **Matemática para economistas**. Bookman, 2004.
- SYDSAETER, K; HAMMOUND, P; SEIERSTAD, A; STROM, A. **Further mathematics for economic analysis**. Pearson education. 2008.