Uma Regra Para Distribuição de Cotas de Produção em um Cartel

Helson Gomes de Souza
helson@alu.ufc.br

4 de dezembro de 2023

1 Definições iniciais

Considere um mercado de concorrência imperfeita onde um grupo limitado de $i = 1, 2, ..., n$ produtores produzem um produto com grau de substituibilidade tendendo ao infinito, de modo que n deve ser obrigatoriamente maior que 1, mas deve ser pequeno o suficiente para que as tomadas de decisão dos produtores tenha o poder de interferir no preço do mercado. Suponha que a entrada e/ou saída do mercado não é perfeitamente livre, mas que porém, a informação é perfeita e simétrica. Deixe p_i representar o preço que o mercado define para cada produto e considere q_i como sendo a quantidade produzida por cada produtor individualmente. Como cada produtor é capaz de tomar decisões que interferem no preço de mercado e dado que os produtos são altamente semelhantes, então o preço do i-ésimo produto depende não somente da quantidade produzida pelo i-ésimo produtor, mas também depende do nível de produção dos demais produtores. Suponha que cada produtor está sujeito a uma função demanda específica com as seguintes propriedades:

$$p_i = f(q_i, q_j) \quad \text{com} \quad j = 1, 2, ..., 1; \quad i \neq j; \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_i} < 0; \quad \lim_{q_i \to 0} f(q_i) = \infty; \quad \lim_{q_i \to \infty} f(q_i) = 0 \tag{1}$$

Considere que $f(q_i, q_j)$ é contínua e convexa em todo o seu domínio. Deixe $ct_i = g(q_i)$ representar o custo total de produção do i-ésimo produtor, de tal modo que $\forall\ q_i > 0, ct_i > 0$ deve ser válido. Considere que cada produtor escolhe um nível de produção capaz de lhe proporcionar um lucro π_i, em que $\pi_i = \pi_j$ com $j \neq i$ não é uma regra. Formalmente, o lucro de cada produtor individual é dado por:

$$\pi_i = p_i q_i - ct_i \tag{2}$$

Considerando a Equação 1, o lucro do produtor individual pode ser redefinido como:

$$\pi_i = q_i f(q_i, q_j) - ct_i \tag{3}$$

Tomando a condição necessária para a maximização do lucro, obtém-se:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = f(q_i, q_j) + q_i \left[\left(\frac{\partial f(q_i, q_j)}{\partial q_i} \right) \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_i}}_{1} + \left(\frac{\partial f(q_i, q_j)}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right] - cm_i = 0 \tag{4}$$

Em que cm_i é o custo marginal de cada produtor individual e $\partial q_j / \partial q_i$ são as conjecturas que cada produtor toma em relação às possibilidades de produção dos demais produtores. Como cada produtor específico não possui conhecimento sobre o valor de $\partial q_j/\partial q_i$, então o vetor de preços capaz de proporcionar um equilíbrio para este tipo de problema não é único, o que viola o pressuposto de unicidade do equilíbrio de mercado. Em outras palavras, não é possível obter um único valor para p_i na Equação 4 de maneira meramente algébrica.

2 A solução de cartel

Uma das soluções consideradas na teoria econômica para resolver este problema é o caso em que as firmas se unem em uma espécie de cartel onde os produtores definem o nível ótimo de produção capaz de maximizar o lucro do cartel. Neste caso, a produção da indústria é a soma dos níveis individuais de produção e o problema do produtor individual passa a ser:

$$\max \pi = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} ct_i \quad \text{Sujeito a } p_i = f(Q) \quad \text{Com} \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{5}$$

Substituindo a restrição na função objetivo:

$$\pi = f(Q) \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} ct_i \tag{6}$$

Tomando a condição necessária para a maximização do lucro em relação à produção da i-ésima firma, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial q_i} &= f(Q) + q_i \frac{\partial f(Q)}{\partial q_i} + q_j \frac{\partial f(Q)}{\partial q_i} - cm_i = 0 \\ cm_i &= f(Q) + q_i \frac{\partial f(Q)}{\partial q_i} + q_j \frac{\partial f(Q)}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{7}$$

Como as firmas estão organizadas em um conluio com o objetivo de maximizar o lucro, então $\partial f(Q)/\partial q_i = \partial f(Q)/\partial q_j$. Em resumo, a Equação 7 demonstra que o lucro do cartel será máximo caso os custos marginais de todos os produtores do conluio sejam iguais. No entanto, esta solução não é estável e duradoura, uma vez que não há claras regras sobre como se dará as cotas de produção atribuídas a cada firma.

3 Definindo as cotas com base no tamanho da firma

Considere que cada firma possui um tamanho s_i que pode ser interpretado como o seu poder de interferência sobre o preço e consequentemente como a sua influência dentro do cartel, de tal modo que $\sum_i s_i = S$ e $s_i = s_j$ não é uma regra. Suponha também que os produtores concordam em distribuir a produção do cartel de acordo com o tamanho de cada firma, de modo que a seguinte condição deve ser obedecida:

$$q_i = \left(\frac{s_i}{S}\right) \sum_i q_i \tag{8}$$

O que implica em:

$$\begin{aligned} Sq_i - s_i q_i &= \sum_j q_j \\ q_i &= \frac{\sum_j q_j}{S - s_i} \end{aligned} \tag{9}$$

O lucro do cartel será, portanto:

$$\pi = f(Q)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_j q_j}{S - s_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} ct_i \tag{10}$$

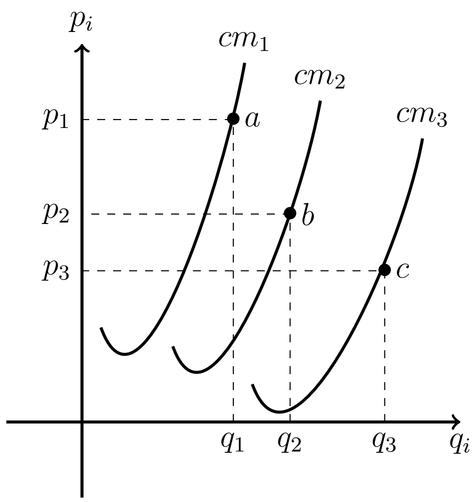
A condição necessária para a maximização do lucro neste caso estabelece que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial q_i} &= \left(\frac{\partial f(Q)}{\partial q_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_j q_j}{S - s_i}\right) + f(Q)\sum_j \left(\frac{1}{S - s_j}\right) - cm_i = 0 \\ cm_i &= \left(\frac{\partial f(Q)}{\partial q_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sum_j q_j}{S - s_i}\right) + f(Q)\sum_j \left(\frac{1}{S - s_j}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Theorem 1 (Impossibilidade da exclusão de membros)**.** *O cartel só é viável se todos os produtores que compõem o mercado estiverem de acordo com as regras do conluio.*

Demonstração. Para que o lucro do cartel esteja de fato sendo maximizado, os custos marginais de produção de cada firma devem obrigatoriamente ser iguais. Para modelar esta condição, considere a representação gráfica das curvas de custo marginal no plano cartesiano. Cada produtor detém uma combinação ótima de preços e quantidades localizada na parte crescente da sua curva de custo marginal individual conforme representado na Figura 1.

Figura 1: Representação teórica das curvas individuais de custo marginal para n = 3.



Cada custo marginal gera um determinado preço como *output*, o que implica na conclusão de que, se os custos marginais são iguais, então os preços praticados pelas firmas do cartel devem necessariamente ser iguais. No entanto, considere o caso em que pelo menos um dos produtores desconsidere a regra que conduz ao lucro ótimo da indústria e escolha um nível de produção que torne o seu preço diferente do preço do cartel. Para modelar esta condição, considere a curva de custo marginal de um dado membro do cartel apresentada na Figura 2. Deixe $p^\star$ representar o preço que torna todos os custos marginais dos membros do conluio equivalentes. O produtor específico pode desprezar a regra de maximização do lucro da indústria escolhendo $p_i' > p^\star$ ou $p_i'' < p^\star$.

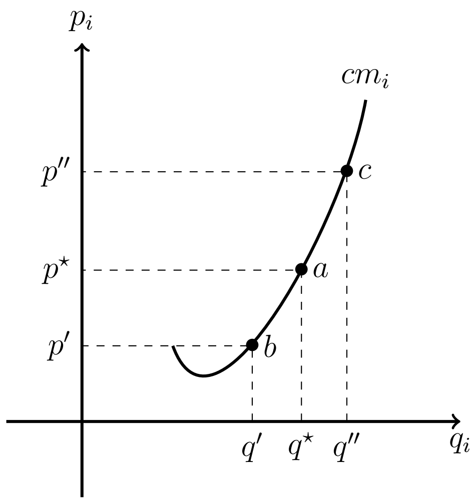
Para contornar esta possibilidade e garantir que de fato a condição de otimilaridade está sendo garantida é preciso que a área formada pela parte inferior da curva de custo marginal que vai desde a cota de produção até os níveis de produção que desconsideram a regra do lucro ótimo da firma é nula. Em outras palavras, considere como válido que:

$$
\begin{aligned}
\int_{q=q'}^{q^\star} cm_i dq_i = 0 \\
\int_{q=q^\star}^{q''} cm_i dq_i = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

Note que para quaisquer valor produzido em desacordo com a regra de maximização do lucro da indústria inviabiliza a Equação 12, o que prova que se pelo menos um único membro do cartel violar as regras do conluio, então o lucro da indústria não será máximo.

É válido ressaltar que a antiderivada do custo marginal do produtor individual é o seu custo total. Dado que nada pode ser produzido a um custo zero, então as sansões impostas pelos demais membros do cartel àquele produtor que desconsiderar o sistema de distribuição de cotas de produção modeladas na Equação 12 indicam que caso um dos membros do cartel opte por escolher um preço que não seja o preço ótimo da indústria, então os demais membros do cartel utilizam o seu poder de mercado para redistribuir as cotas de modo a atender toda a demanda de mercado, forçando a oferta do produtor desobediente à nulidade.

Figura 2: Representação teórica das sansões aos desobedientes.



□

Para que esta regra de distribuição de cotas de produção seja factível é preciso, contudo, que os membros do conluio não sejam grandes o suficiente para deterem o total controle sobre o produto da indústria, do contrário, um único produtor seria responsável pela cota completa de produção, tornando-se um monopolista puro do mercado. Em outras palavras, a medida que s_i tende a S, a produção tende a ser executada por um único produtor, o qual passa a deter um poder sobre a definição do preço de mercado, isto é:

$$\lim_{s_i \to S} Q_i = Q \tag{13}$$

Para contornar este problema, considere a condição de que $s_i = S$ não se aplica no cartel, isto é:

$$s_i < S \ \ \forall \ \ i \tag{14}$$

4 Cartel com n = 3

Considere que em um dado mercado existem apenas três empresas encarregadas de produzir um produto com alto grau de similaridade. O lucro da indústria é:

$$\pi = q_1[a_1 - b_1(q_1+q_2+q_3)] + q_2[a_2 - b_12(q_1+q_2+q_3)] + q_3[a_3 - b_3(q_1+q_2+q_3)] - ct_1 - ct_2 - ct_3 \quad (15)$$

Reorganizando:

$$\pi = a_1q_1 - b_1q_1^2 - b_1q_1(q_2+q_3) + a_2q_2 - b_2q_2^2 - b_2q_2(q_1+q_3) + a_3q_3 - b_3q_3^2 - b_3q_3(q_1+q_2) - ct_1 - ct_2 - ct_3 \quad (16)$$

As condições de primeira ordem para a maximização do lucro são:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = a_1 - 2b_1q_1 - b_1(q_2+q_3) - b_2 - b_3 - cm_1 = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = a_2 - 2b_2q_2 - b_2(q_1+q_3) - b_1 - b_3 - cm_2 = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_3} = a_3 - 2b_3q_3 - b_3(q_1+q_2) - b_1 - b_2 - cm_3 = 0 \quad (19)$$

Com base na Equação 9, considere que:

$$q_1 = \frac{q_2+q_3}{S-s_1}; \quad q_2 = \frac{q_1+q_3}{S-s_2}; \quad q_3 = \frac{q_1+q_2}{S-s_3}; \quad (20)$$

E deixe $cm_1 = cm_2 = cm_3 = cm$. Resolvendo a Equação 17:

$$\begin{aligned} cm &= a_1 - \frac{2b_1(q_2+q_3)}{S-s_1} - b_1(q_2+q_3) - b_2 - b_3 \\ cm &= a_1 - b_2 - b_3 - \left[\frac{2b_1(q_2+q_3) + b_1(q_2+q_3)(S-s_1)}{S-s_1}\right] \\ cm &= a_1 - b_2 - b_3 - \left(\frac{b_1(q_2+q_3)}{S-s_1}\right)[2+S-s_1] \end{aligned} \quad (21)$$

Pela Equação 20, note que $q_2 + q_3 = q_1(S - s_1)$. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} cm &= a_1 - b_2 - b_3 - \left(\frac{b_1q_1(S-s_1)}{S-s_1}\right)[2+S-s_1] \\ b_1q_1(2+S-s_1) &= a_1 - b_2 - b_3 - cm \\ q_1 &= \frac{a_1 - b_2 - b_3 - cm}{b_1(2+S-s_1)} \end{aligned} \quad (22)$$

Se os produtos produzidos pelos produtores são idênticos, então o preço deve ser o mesmo, o que implicaria em $a_1 = a_2 = a_3$ e $b_1 = b_2 = b_3$. Neste caso a cota de produção do produtor 1 seria:

$$q_1 = \frac{a - 2b - cm}{b(2+S-s_1)} \quad (23)$$

Resolvendo a Equação 18:

$$\begin{aligned}
cm &= a_2 - \frac{2b_2(q_1+q_3)}{S-s_2} - b_2(q_1+q_3) - b_1 - b_3 \\
cm &= a_2 - b_1 - b_3 - \left[\frac{2b_2(q_1+q_3) - b_2(q_1+q_3)(S-s_2)}{S-s_2}\right] \\
cm &= a_2 - b_1 - b_3 - \left(\frac{b_2(q_1+q_3)}{S-s_2}\right)[2+S-s_2]
\end{aligned} \tag{24}$$

Como pela Equação 20 $q_1 + q_3 = q_2(S - s_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
cm &= a_2 - b_1 - b_3 - \left(\frac{b_2 q_2(S-s_2)}{S-s_2}\right)[2+S-s_2] \\
q_2 &= \frac{a_2 - b_1 - b_3 - cm}{b_2(2+S-s_2)}
\end{aligned} \tag{25}$$

Se cada produtor produz o mesmo produto, então a cota de produção do produtor 2 é:

$$q_2 = \frac{a - 2b - cm}{b(2+S-s_2)} \tag{26}$$

Resolvendo a Equação 19:

$$\begin{aligned}
cm &= a_3 - \frac{2b_3(q_1+q_2)}{S-s_3} - b_3(q_1+q_2) - b_1 - b_2 \\
cm &= a_3 - b_1 - b_2 - \left[\frac{2b_3(q_1+q_2) + b_3(q_1+q_2)(S-s_3)}{S-s_3}\right] \\
cm &= a_3 - b_1 - b_2 - \left(\frac{b_3(q_1+q_2)}{S-s_3}\right)[2+S-s_3] \\
&\text{Como } q_1 + q_2 = q_3(S-s_3) \\
cm &= a_3 - b_1 - b_2 - \left(\frac{b_3 q_3(S-s_3)}{S-s_3}\right)[2+S-s_3] \\
q_3 &= \frac{a_3 - b_1 - b_2 - cm}{b_3(2+S-s_3)}
\end{aligned} \tag{27}$$

Se cada produtor produz o mesmo produto, então a cota de produção do produtor 3 é:

$$q_2 = \frac{a - 2b - cm}{b(2+S-s_3)} \tag{28}$$

Com base nas Equações 22, 25 e 27, conclui-se que a solução para a produção do cartel em um mercado com demanda inversa linear, com cotas de produção baseadas no tamanho de cada firma e com produtos similares porém diferentes é:

$$q_i = \frac{a_i - \sum_j b_j - cm}{b_i(2+S-s_i)} \tag{29}$$

Com base nas Equações 23, 26 e 28, conclui-se que a solução para a produção do cartel em um mercado com demanda inversa linear, com cotas de produção baseadas no tamanho de cada firma e com produtos iguais é:

$$q_i = \frac{a - 2b - cm}{b_i(2+S-s_i)} \tag{30}$$

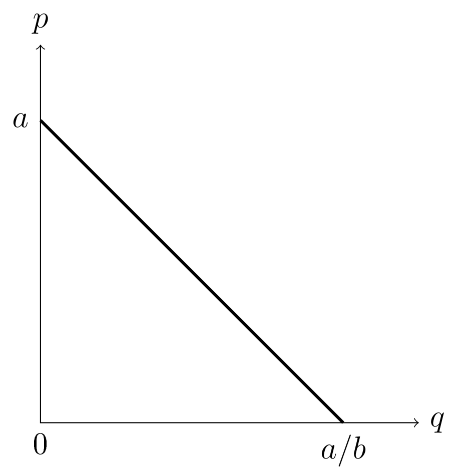
5 Condições adicionais em um mercado com demanda linear

Em um mercado com demanda linear os interceptos vertical e horizontal da curva de demanda são bem definidos e as equações que compõem o sistema devem respeitar as restrições oriundas da posição dos interceptos no sistema de preços. Neste caso, as seguintes condições devem ser estabelecidas:

1. **O preço não pode superar o intercepto horizontal da curva de demanda:**

   O intercepto vertical da curva de demanda é definido como o preço que ocorreria caso a oferta do produto fosse nula (preço autônomo - que independe da oferta), ao passo que o intercepto horizontal é a demanda que ocorreria caso o preço fosse nulo. Assim, em uma função de demanda inversa do tipo $p = a - bq$, então a curva de demanda tem as seguintes propriedades:

   Figura 3: Definição dos interceptos da curva de demanda linear.

   Note que, $\forall\ p > a, \nexists\ q \in \mathbb{R}$, o que implica na condição obrigatória de que $p \leq sum_i a_i$ deve ser obedecida.

2. **A oferta agregada não deve ultrapassar a razão entre o preço autônomo e a inclinação da curva**

   Observando a Figura 3, note que $\forall\ q > a/b, \nexists\ q \in \mathbb{R}$, o que implica na condição de que $\sum_i q_i \leq \sum_i a_i/b_i$ deve obrigatoriamente ser obedecida.

3. **O custo marginal de produção não deve estar acima da curva de demanda**

   Na Figura 3, a área formada pelo triângulo $0 - a - a/b$ representa as combinações factíveis de preço e produção, de modo que, em qualquer ponto fora deste triângulo não há preço, oferta ou demanda factíveis. Assim, caso o cartel opte por um custo marginal que implique em um nível de preços $p^\star$ tal que $p^\star > a - bq$, então a produção no mercado é inviável. Assim, obrigatoriamente deve ocorrer que $cm \leq \sum_i (a_i - b_i q_i)$.